(Suppea) suhteellisuusteoria

Tapio Hansson

Taustaa

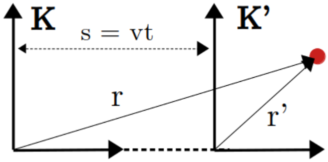
- Vuonna 1905 Albert Einstein julkaisi varsin yllättäen artikkelin, jossa hän käsittelee kappaleiden liikettä.
- Newtonin mekaniikkaa pidettiin siihen asti varmana faktana, mutta artikkeli kyseenalaisti Newtonilaisen käsityksen muuttumattomasta ajasta ja avaruudesta.
- Suppea suhteellisuusteoria pätee vain *inertiaalikoordinaatistoille*, mutta teorian laajennos yleinen suhteellisuusteoria vuonna 1915 pätee myös kiihtyvässä liikkeessä oleville koordinaatistoille.
- Kappaleen sanotaan olevan inertiaalikoordinaatistossa, jos se liikkuu täysin muuttumattomalla nopeudella. Eli kappaleeseen ei kohdistu ulkoista voimaa.
- Kaikki koetulokset ovat toistaiseksi vahvistaneet suhteellisuusteorian, mutta se ei selitä kaikkia asioita maailmasta, ja on tietyiltä osin ristiriidassa kvanttimekaniikan kanssa.

Galilein koordinaatistomuunnos

- Jo Galileo Galilei huomasi liikkeen suhteellisuuden. Newtonilaisessa mekaniikassa liikkeen suhteellisuus. Galilei-invarianssi tarkoittaa, että Newtonin mekaniikka pätee kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.
- Newtonin mekaniikassa koordinaatistosta toiseen voidaan siirtyä Galilein koordinaatistomuunnoksella.
- Esimerkiksi voimme tarkastella junassa tapahtuvaa pöytätennisottelua joko maahan kiinnitetyssä tai junaan kiinnitetyssä koordinaatistossa.
- Tekemällä kokeita inertiaalikoordinaatiston sisällä, ei voi päätellä liikkuuko intertiaalikoordinaatisto jonkin muun koordinaatiston suhteen.

Galilein koordinaatistomuunnos

- Olkoon kaksi inertiaalikoordinaatistoa K ja K', joista K' kulkee x-akselin suunnassa pois päin koordinaatistosta K tasaisella nopeudella v. Valitaan lisäksi, että koordinaatistojen origot ovat samassa kohdassa kun $t = 0$.



- Hiukkasen paikkaa voidaan kuvata kummassakin koordinaatistossa. Paikan muutos koordinaatistojen välillä on:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \end{cases}$$

Esimerkki

- Pendolinojuna ohittaa Hyvinkään aseman nopeudella $v = 15$ m/s. Junan keulaan kiinnitetty koordinaatisto on asemalaiturin koordinaatiston kohdalla hetkellä $t = 0$. Olkoon aseman koordinaatisto K ja junan K'.
- Sami seisoo aseman koordinaatistossa kohdassa $x = 3\,\mathrm{m}$ kuvaamassa pendolinoa. Mikä hänen sijaintinsa on junan koordinaatistossa hetkellä $t = 5\,\mathrm{s}$?
  - $x' = x - vt = 3\,\mathrm{m} - 15\,\mathrm{m/s} \cdot 5\,\mathrm{s} = -72\,\mathrm{m}$
- Taina istuu junan kyydissä paikassa $x' = -32\,\mathrm{m}$. Missä kohdassa hän on aseman koordinaatistossa ajan hetkellä $t = 5\,\mathrm{s}$.
  - $x = x' + vt = -32 + 15\,\mathrm{m/s} \cdot 5\,\mathrm{s} = 43\,\mathrm{m}$

Nopeus ja kiihtyvyys

- Merkitään koordinaatistossa K liikkuvan kappaleen nopeutta u ja koordinaatistossa K' u'. Kappaleen nopeus on paikan derivaatta ajan suhteen. Tällöin nopeudet koordinaatistossa K' saadaan

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \end{cases}$$

- Vastaavalla tavalla kiihtyvyys on nopeuden derivaatta, joten koordinaatistoissa kappaleen kiihtyvyydet ovat

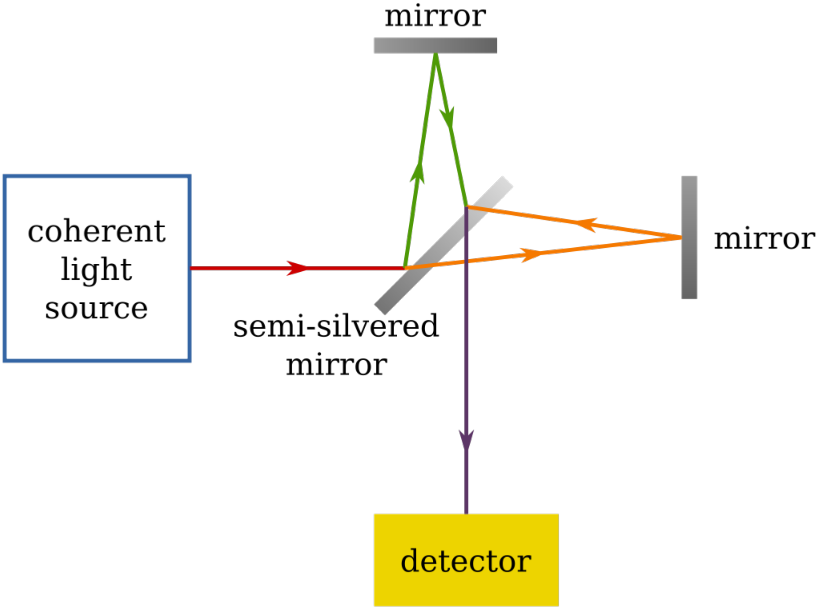
$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \end{cases}$$

- Kappaleen kiihtyvyys (eli siihen vaikuttava voima) ei siis riipu inertiaalikoordinaatistosta, jossa sitä tarkastellaan!

Michelsonin ja Morleyn koe

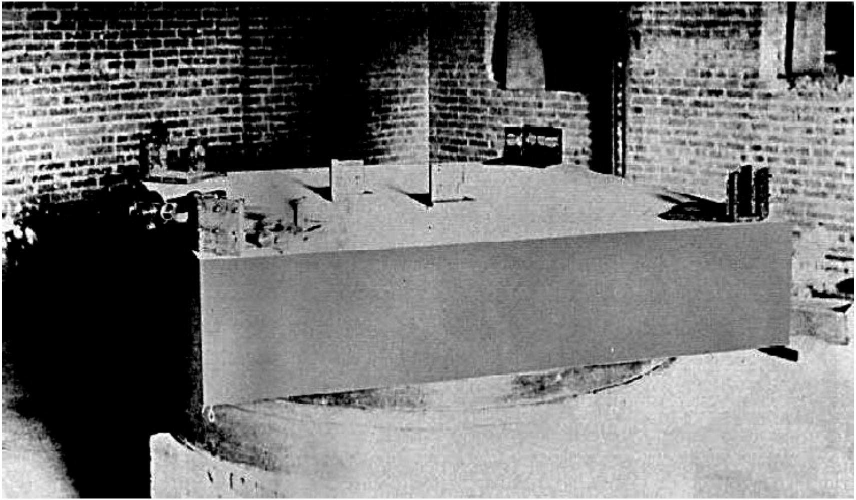
- Vielä 1800-luvulla uskottiin vahvasti ”viidennen alkuaineen” eetterin täyttävän kaiken avaruuden. Eetteri tarjoaisi lepokoordinaatiston, johon verrattuna kaikki muut kappaleet liikkuvat. Eetteri oli valon väliaine.
- Michelsonin ja Morleyn kokeessa pyrittiin määrittämään Maan ratanopeus eetteriin nähden.
- Periaatteena oli verrata Maan radan suunnassa ja sitä vastaan kohtisuorassa suunnassa kulkevien valonsäteiden nopeuksia valon interferenssin avulla.
- Kokeen tarkoituksena oli alunperin mitata ”eetterituulen” vaikutus valon nopeuteen, mutta minkäänlaista tuulta ei havaittu, joten koe tavallaan epäonnistui, vaikka tulos olikin eräs historian merkittävimpiä yksittäisiä koetuloksia.

Michelsonin ja Morleyn koe



kuva: public domain

Michelsonin ja morleyn koe



Kuva alkuperäisestä Michelsonin interferometristä.
kuva: public domain

Michelsonin ja Morleyn kokeen selityksiä

1. Maa voisi kuljettaa eetteriä mukanaan. Tähtien aberraatio, eli suhteellinen liike Maan liikkeen mukaan kuitenkin osoittaa tämän vaihtoehdon mahdottomaksi.
2. Hendrik Lorenz ehdotti, että kappaleet kutistuvat liikesuunnassaan tekijällä $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Hänellä ei kuitenkaan ollut mitään perusteluja, miksi näin tapahtuisi.
3. Sähkömagnetismin teoria on väärin, ja valon nopeus on aina valolähteen suhteen, eikä väliaineen. Tämä vaihtoehto selittäisi alkuperäisen kokeen, sillä valonlähde on lepokoordinaatistossa Maan suhteen.Koe on kuitenkin toistettu esimerkiksi Auringon valoa käyttäen, eikä interferenssiä ole havaittu silloinkaan.

Ratkaisu: Aika

- Galilein muunnoksen perusteella valon nopeus voi olla vakio vain yhdessä koordinaatistossa, ja Maan liikettä tämän koordinaatiston suhteen ei havaittu, vaikka Maa selvästi liikkuu.
- Einsteinin suuri oivallus oli, että luopumalla *ajan absoluuttisuudesta*, tästä ongelmasta päästään eroon.
- Korjaamalla Galilein muunnosta, klassinen sähkömagnetismi toimii kaikissa intertiaalikoordinaatistoissa kuten pitääkin.

Suhteellisuusteorian postulaatit

- Kaikki teoriat nojaavat lähtökohtaisesti joihinkin perusolettamuksiin. Erityisessä suhteellisuusteoriassa niitä on kaksi:
  1. Fysiikan lait ovat samat kaikissa inetriaalikoordinaatistoissa.
     - Avaruudessa ei siis ole erityistä pistettä, jonka voisi määrittää olevan paikoillaan. Ei kiinteää origoa.
  2. Valon tyhjiönopeus on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa, eikä riipu valonlähteen ja havaitsijan välisestä nopeudesta.
- Koska valonnopeus on riippumaton havaitsijasta, on *aika* riippuva.
- Lisäksi oletetaan, että avaruus ja aika ovat homogeenisia ja avaruus *isotrooppinen*, eli mikään paikka tai *suunta* ei ole erityisasemassa.

Lorentzin muunnos

- Lähtemällä liikkeelle siitä, että valonnopeus on kaikissa koordinaatistoissa sama, voidaan johtaa niin sanotut Lorentzin muunnokset, jotka korjaavat Galilein muunnoksen.
- Olettaen jälleen, että koordinaatisto K' liikkuu koordinaatiston K suhteen nopeudella v, x-akselin suuntaisesti, päädytään nyt koordinaatistomuunnokseen:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

- Myös *tapahtuman* aika on siis eri koordinaatistoissa eri!

Käänteismuunnos

- Ratkaisemalla edellisistä muunnoksista muuttujat x ja t saadaan käänteismuunnos, jolla voidaan siirtyä koordinaatistosta K' koordinaatistoon K. Käänteismuunnos on

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Samanaikaisuus

- Koordinaatistossa K' samaan aikaan tapahtuvat tapahtumat eivät tapahdu samaan aikaan koordinaatistossa K, mikäli tapahtumat eivät tapahdu samassa pisteessä.
- Laskemalla käänteismuunnoksen avulla, saadaan koordinaatistossa K' eri paikoissa mutta samaan aikaan tapahtuvien tapahtumien aikaväliksi koordinaatistossa K on

$$\Delta t = \frac{v \Delta x'}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pituuden kutistuminen, eli kontraktio

- Tarkastellaan x-akselin suuntaista sauvaa, joka on levossa koordinaatistossa K'. Sauvan *lepopituudeksi* l_0 kutsutaan sauvan pituutta tässä koordinaatistossa, eli sen kärkien koordinaattien erotusta.
- $l_0 = \Delta x' = x_2' - x_1'$, missä x_2' ja x_1' ovat sauvan päiden koordinaatit.
- Kun tarkastellaan sauvan pituutta koordinaatistossa K luetaan päiden sijainti samalla hetkellä, eli $\Delta t = 0$. Tällöin sauvan pituudeksi saadaan koordinaatistomuunnoksella

$$l_0 = \Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Joka kirjoitetaan useimmiten muodossa

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

- Liikkuva kappale näyttää siis lyhyemmältä liikkeen suunnassa!

Aikadilataatio, eli ajan venyminen

- Koska aikakaan ei ole absoluuttista, käyvät eri koordinaatistoissa olevat kellot eri tahtia.
- Aikaa, jonka kappaleeseen kiinnitetty kello mittaa kutsutaan *itseisajaksi* t_0.
- Jos kappale on levossa koordinaatistossa K', ja sen itse kokeman kahden tapahtuman aikaero on Δt_0, on tällöin ulkopuolisen koordinaatiston K mittaama aika

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Eli missä tahansa liikkuvassa koordinaatistossa mitattu aikaero on suurempi kuin kappaleen itseisaikaero.
- Eli liikkuva kello jätättää!

Liikemassa

- Massa on kappaleen ominaisuus, joka kuvaa kappaleen hitautta, eli miten kappale vastustaa kiihdyttämistään. Toisaalta se kuvaa myös painovoiman vaikutusta kappeleeseen.
- Suhteellisuusteorian mukaan kyse on täsmälleen yhdestä ja samasta asiasta.
- Kappaleen nopeuden kasvaessa kappaleen liike-energia kasvaa myös. Tämä selitetään usein "massan kasvamisena", mutta kappaleen massa ei todellisuudessa muutu, vaan sen kokonaisenergia, joka sisältää sekä massan sisältämän energian, että liike-energian muuttuu.
- Lepomassa ja liikemassa ovat siis hieman harhaanjohtavia käsitteitä.

Kokonaisenergia

- Einsteinin teoriassa kappaleen kokonaisenergia saadaan kaavalla

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Toisinaan tästä erotetaan liikemassa

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

  mutta kuten edellä todettiin, sen on termi, joka ei kuvaa fysikaalista todellisuutta kovin hyvin.

- Kappaleen liike-energian voi kuitenkin määrittää vähentämällä kokonaisenergiasta lepo-energian:

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

Nopeuksien yhdistäminen

- Suhteellisuusteoria estää nopeuden nousemisen yli valonnopeudeksi.
- Näin ollen edes nopeuksia yhdistämällä ei valonnopeutta voi ylittää.
- Jos esimerkiksi kuljet avaruusaluksella nopeudella 0,8c ja ammut sieltä ohjuksen nopeudella 0,4c, ei ohjuksen nopeus ylitä valonnopeutta.
- Loppunopeus, kun nopeudella v_1 kulkevaan kappaleeseen lisätään nopeus v_2 saadaan kaavasta

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

- Kaava voidaan johtaa Lorentz-muunnosten derivaattojen avulla.

Esimerkki: Kosmiset myonit

- Pii-mesonien hajotessa yläilmakehässä n. 3 km korkeudessa muodostuu elektronien kaltaisia, mutta n. 200 kertaa raskaampia hiukkasia. Myonit ovat epävakaita, ja niiden puoliintumisaika on vain n. $1,5\,\mu$s.
- Myonit aiheuttivat kysymysmerkkejä, sillä periaatteessa niiden ei pitäisi ehtiä yläilmakehästä Maan pinnalle, vaikka ne kulkevat n. $0,99c$ nopeudella.
- Tällainen myoni ehtii keskimäärin kulkea

$$s = vt = 0,99 \cdot 299792458\,\mathrm{m/s} \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \approx 450\,\mathrm{m}$$

- Myoneja kuitenkin havaitaan runsaasti Maan pinnalla. Miksi?

Esimerkki: Kosmiset myonit Maan lepokoordinaatistossa

- Ratkaisu on luonnollisesti suhteellisuusteoriassa. Koska myonit lentävät suurella nopeudella suhteessa Maahan, käy niiden kello hitaammin kuin Maassa olevan havaitsijan. Näin ollen lepokoordinaatistossa mitattu puoliintumisaika venyy:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1,5\,\mu\mathrm{s}}{\sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}}} = 11\,\mu\mathrm{s}$$

- Tässä ajassa myoni ehtiikin siis kulkea matkan:

$$s = vt = 0,99 \cdot 299792458\,\mathrm{m/s} \cdot 11 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \approx 3200\,\mathrm{m}$$

- Näin ollen keskimääräinen Myoni ehtii aivan hyvin Maahan 3 km korkeudesta.

Esimerkki: Kosmiset myonit myonin lepokoordinaatistossa

- Toinen tapa ajatella tilannetta on myonin lepokoordinaatistossa. Tällöin kuluva aika on edelleen $1,5\,\mu$s, mutta nyt näyttää siltä, että Maa lähestyy myonia $0,99c$ nopeudella.
- Näin nopea kappale kutistuu liikesuunnassaan huomattavasti. Olettaen, että myoni syntyy 3 km korkeudessa, eli $l_0 = 3000\,\mathrm{m}$. Näyttää etäisyys Maahan myonin näkökulmasta olevan ainoastaan

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 3000\,\mathrm{m}\sqrt{1-\frac{(0.99c)^2}{c^2}} \approx 420\,\mathrm{m}$$

- Tämän matkan myoni kulkee ajassa,

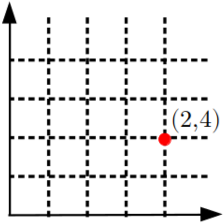
$$t = \frac{s}{v} = \frac{420\,\mathrm{m}}{0,99\cdot 299792458\,\mathrm{m/s}} \approx 1,4\,\mu\mathrm{s}$$

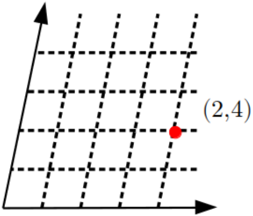
Minkowskin diagrammit

- Tulimme hieman aiemmin siihen tulokseen, että liikkuva kello jätättää.
- Koska liike on kuitenkin suhteellista ja meidän mielestämme liikkuvan kappaleen näkökulmasta me olemme liikkeessä, herää kysymys, että kenen kellon sitten oikein pitäisi jätättää.
- Kuvitellaan esimerkiksi veljekset Mikko ja Antti omilla avaruusaluksillaan tyhjään avaruuteen. Jos molemmat ovat tasaisessa liikkeessä, ei ole periaatteessa mitään keinoa sanoa, kumpi etääntyy kummasta.

Minkowskin diagrammit

- Asiaa voidaan lähestyä niin sanottujen Minkowskin diagrammien avulla.
- Huomioidaan ensiksi, että vaikka olemme tottuneet suorakulmaiseen karteesiseen koordinaatistoon, ei suorakulmainen koordinaatisto ole mitenkään välttämätön avaruuden pisteiden merkitsemiseksi.



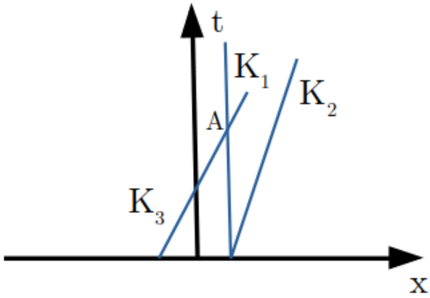


- Tason pisteet voidaan lukea, vaikka koordinaattiakselit eivät olisi kohtisuorassa. Tämä tosin tekee etäisyyden määrittämisen koordinaatistossa hieman haastavaksi.

Minkowskin diagrammit

- Minkowskin diagrammissa tarkastellaan kappaletta (x, t)-koordinaatistossa. Aika tulee siis pystyakselille, ja sijainti vaaka-akselille.
- Kaksiulotteisessa diagrammissa voidaan siis tarkastella vain yksiulotteista liikettä, eli kappaleen etäisyyttä jossain kiinnitetyssä suunnassa.
- Kappaleen rata Minkowskin diagrammissa on nimeltään *maailmanviiva*.
- Kaikki koordinaatiston pisteet ovat *tapahtumia*, eli kaikissa paikoissa on "tapahtuma"kaikilla ajan hetkellä.

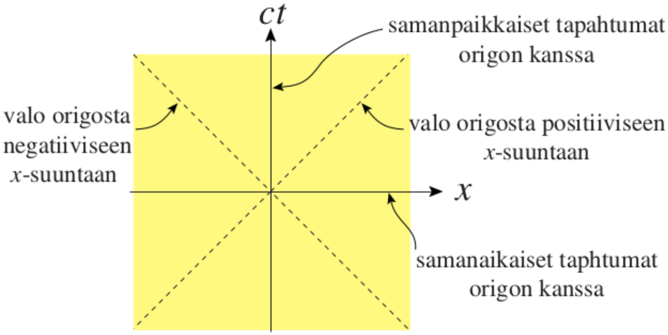
Minkowskin diagrammit



- Kappale K_1 on paikoillaan, ja kappale K_2 lähtee samasta paikasta ajan hetkellä $t = 0$ tasaisella nopeudella pois päin siitä. Kappale K_3 kulkee kappaletta K_1 kohti tasaisella nopeudella, ja kappaleet kohtaavat tapahtumassa A.

Minkowskin diagrammit

- Periaatteessa koordinaatiston yksikön voi valita haluamallaan tavalla, esim. vaaka-akselilla 1 metri ja pystyssä 1 sekunti.
- Usein on kuitenkin järkevää valita koordinaatisto siten, että ajan sijaan pystyakselille asetetaan suure ct, jolloin kummallakin akselilla on sama yksikkö.
- Tällaisessa kaaviossa valo kulkee 45 asteen kulmassa!



Minkowskin diagrammit

- Avaruus jakautuu tällöin neljään alueeseen. Akselin alapuolella on origossa olevan asian menneisyys, ja yläpuolella tulevaisuus.
- Kappaleen maailmanviivan kulmakerroin kertoo, kuinka nopeasti kappale liikkuu.
- Koska valonnopeus on suurin mahdollinen nopeus, jolla edes informaatio voi kulkea, ei kappale voi vaikuttaa alueeseen, joka on alle 45 asteen kulmassa x-akselin kanssa!