Derivaatta II

Tapio Hansson

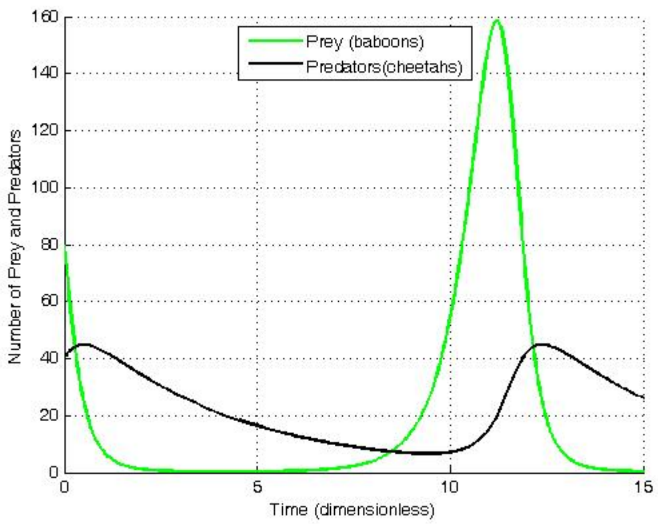
Sisällys

Derivaatta II -kurssi

Tämä materiaali on suunnattu lukion koulukohtaisen syventävän kurssin Derivaatta II oppimateriaaliksi. Kurssilla kerrataan ja syvennetään valtakunnallisten kurssien MAA6, MAA7 ja MAA8 sisältöjä, eli paneudutaan derivaattaan työkaluna ja syvennytään yleisimpien alkeisfunktioiden, kuten polynomien, eksponenttifunktioiden ja logaritmien derivointiin. Lisäksi tutustutaan mm. Taylorin polynomeihin, useamman muuttujan funktioihin ja differentiaaliyhtälöihin.

1 Analyysin työkalu

Matemaattisia malleja käytetään nykyisin lähes kaikilla tieteenaloilla. Malleilla yritetään kuvata monimutkaisia systeemejä paitsi fysiikassa ja teknillisillä aloilla, nykyisin myös biologiassa, taloustieteessä, lääketieteessä sekä monilla humanistisilla aloilla. Mallien avulla voidaan systeemistä tai ilmiöstä saada tietoa ja tehdä siitä ennusteita tai pyrkiä parantamaan sen tomintaa. Loppupeleissä matemaattinen malli on funktio, jota tutkimalla voidaan saada paljon tietoa systeemistä tai ilmiöstä, jota funktio kuvaa. Hieman yksinkertaistaen matemaattinen analyysi on matematiikan osa-alue, jossa tutkitaan funktioita ja niiden kulkua.



Kuva 1: Funktioilla voidaan mallintaa esimerkiksi eläinpopulaatioiden kokoja.

Kuva: public domain

Analyysissä käytetään monenlaisia työkaluja, kuten raja-arvoa, sarjakehitelmiä, derivaattaa ja integraalia. Derivaatta kuvaa funktion muutosta, ja on siten erittäin tärkeä työkalu funktion kulun tutkimisessa. Derivaatan avulla saadaan tietoa funktion muutosnopeudesta, mutta sitä voidaan hyödyntää myös esimerkiksi suurimpien ja pienimpien arvojen etsinnässä.

Useimmat ilmiöt ja systeemit ovat varsin monimutkaisia, jolloin niitä kuvaavat funktiotkin ovat yleensä varsin monimutkaisia. Esimerkiksi kuvan (1) funktiot on saatu ratkaisemalla peto-saaliseläin mallissa käytettävät Lotka-Volterran yhtälöt. Gebardien lukumäärä riippuu jollain tavalla paviaanien lukumäärästä ja päin vastoin. Funktiot näyttävät monimutkaiselta, ja sellaisia ne, kuten tosielämän ilmiöitä kuvaavat funktiot yleensä, ovatkin. Monimutkaiset funktiot koostuvat yleensä kuitenkin varsin yksinkertaisista osasista, joten hankalankin funktion kulkua voi usein analysoida tutkimalla yksinkertaisempia osia erikseen.

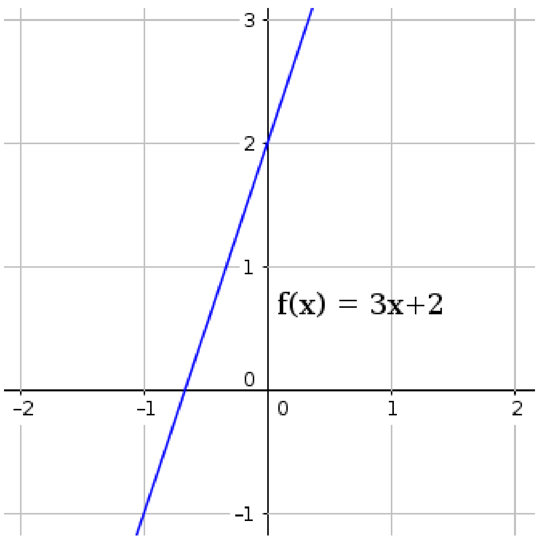
Paitsi funktioiden kulun ja muutoksen tutkimisessa, on derivaatalla sijaa myös suoraan monissa malleissa. Useita ilmiöitä jotka riippuvat jonkin suureen arvosta, sekä arvon muutosnopeudesta tutkitaan nimittäin differentiaaliyhtälöiden avulla. Differentiaaliyhtälöissä tavoitteena on ratkaista funktio yhtälöstä, joka sisältää funktion lisäksi myös sen derivaattoja.

2 Derivaatan määritelmä

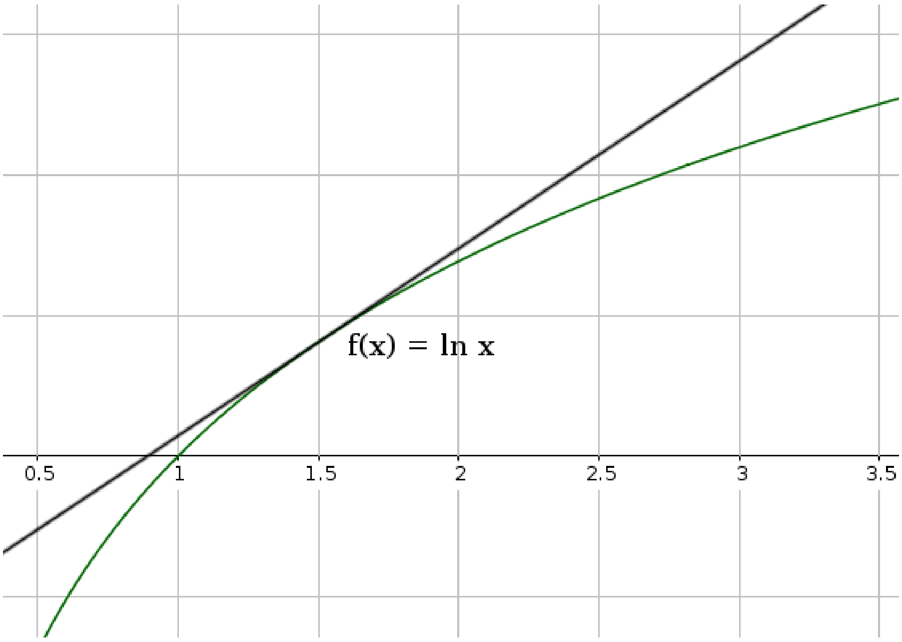
Derivaatta kuvaa funktion muutosnopeutta. Muutosnopeutta tutkiessa funktion kuvaajan ajattelusta on hyötyä, sillä kuvaajan jyrkkyys kertoo muutosnopeuden. Graafinen tarkastelu ei kuitenkaan useimmiten sellaisenaan riitä, eikä loppupeleissä ole aina kovin käytännöllistäkään, sillä usein funktioita joudutaan tutkimaan epäkäytännöllisen suurilla väleillä tai arvoilla. Tämän vuoksi on tarpeen tutustua myös tarkkaan analyyttiseen määritelmään.

2.1 Derivaatta graafisesti

Ensimmäisen asteen polynomin, eli suoran, derivaatan arvo on suoran kulmakerroin, sillä kulmakerroin kuvaa suoran muutosnopeutta. Suoran tapauksessa muutosnopeus on kaikkialla sama, mutta useimmilla funktioilla näin ei tietenkään ole. Mitä jyrkemmin kuvaaja nousee tai laskee, sitä nopeammin funktion arvojen sanotaan muuttuvan. Funktion jyrkkyyttä voi arvioida silmämääräisesti hieman, mutta yksittäisessä kohdassa vallitsevaa jyrkkyyttä varten tarvitaan *tangenttisuora*, joka sivuaa tutkittavaa funktiota yhdessä pisteessä. Suora vain hipaisee funktion pintaa, ja siitä voidaan tutkia, miten funktion arvot ovat muuttumassa juuri tässä yhdessä pisteessä. Tangentin kulmakerroin on tarkalleenottaen derivaatan graafinen määritelmä. Kuten funktion arvo, myös derivaatta määritellään pisteittäin.



Kuva 2: Suoran muutosnopeutta kuvaa kulmakerroin.



Kuva 3: Funktiolle $f(x) = \ln x$ kohtaan $x = 1,5$ piirretty tangentti.

Määritelmä 2.1. Derivaatta
Funktion f derivaattaa merkitään f' ja derivaatan arvo kohdassa x on $f'(x)$.

Määritelmä 2.2. Derivaatan graafinen määritelmä
Funktion f derivaatan arvo kohdassa x on kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin.

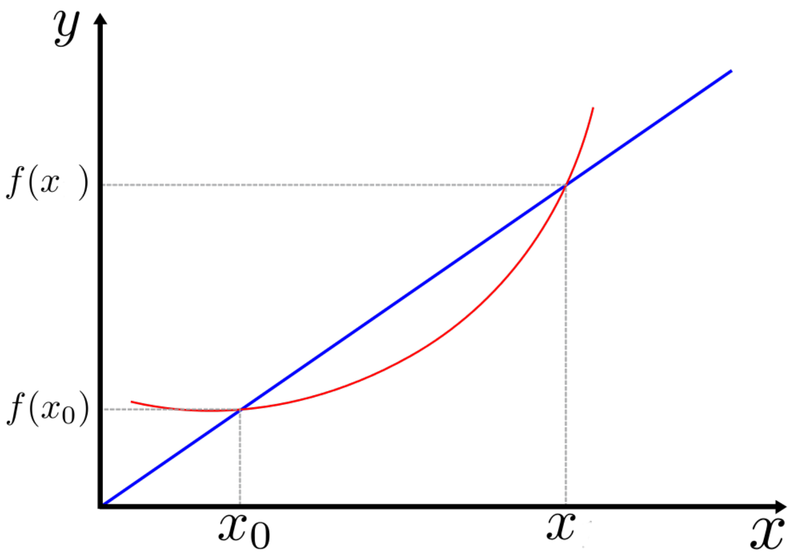
2.2 Erotusosamäärän raja-arvo

Algebrallinen tapa laskea tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin, eli derivaatan arvo tässä kohdasa, on niin sanottu erotusosamäärän raja-arvo. Erotusosamäärä on suure, joka kuvaa funktion keskimääräistä muutosta tietyllä välillä. Muuttujavälillä $[x_0, x]$ funktion f erotusosamäärä on lauseke

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Osoittajassa oleva lauseke $f(x) - f(x_0)$ kertoo, kuinka paljon funktion arvot ovat muuttuneet muuttujan arvojen muuttuessa kohdasta x_0 kohtaan x. Graafisesti erotusosamäärä on pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$ välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

Erotusosamäärä antaa vain keskimääräisen kuvauksen siitä, miten funktio käyttäytyy välillä, mutta mitä lyhyempi väli tarkasteluun otetaan, sitä tarkemmin erotusosamäärä kuvaa funktion muutosta. Tarkka kuvaus muutosnopeudesta saadaan ottamalla erotusosamäärästä raja-arvo, jossa x lähestyy kohtaa x_0. Tällöin pisteiden välille piirretty suora ei enää leikkaa funktiota. Sekantista tulee tangentti, jonka kulmakerroin kertoo funktion muutosnopeuden, eli derivaatan arvon kohdassa $x = x_0$. Tästä saadaan algebrallinen määritelmä derivaatalle.



Kuva 4: Sekantti leikkaa funktion kahdesta kohdasta. Sen kulmakerroin kertoo funktion keskimääräisen muutoksnopeuden leikkauspisteiden välissä.

kuva: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Afgeleide.svg

Määritelmä 2.3. Derivaatta
Funktion f derivaatta kohdassa x_0 määritellään erotusosamäärän raja-arvona

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

Toisinaan raja-arvojen laskemista helpottaa merkintätapa, jossa erotusta $x - x_0$ merkitään kirjaimella h. Tällöin määritelmä tulee muotoon

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3}$$

Esimerkki 1. Funktion $f(x) = x^2$ derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ saadaan laskemalla

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Sama voidaan laskea myös käyttämällä jälkimmäistä merkintä tapaa:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^2 + 2 \cdot 2h + h^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 4 + h = 4 \end{aligned}$$

Huomautus 1. Vaikka lauseke ei olisi määritelty kohdassa jossa raja-arvo halutaan laskea, voidaan se tehdä, mikäli lauseke voidaan sieventämällä saattaa muotoon, joka on määritelty. On kuitenkin hyvä huomata, että alkuperäinen lauseke ei silti ole määritelty, vaikka sievennetyn lausekkeen arvo voidaankin helposti laskea.

3 Derivaatan olemassaolo

Derivaatan olemassaolo ei ole täysin itsestäänselvää, vaikka useimmiten vastaan tulevat funktiot ovatkin derivoituvia kaikkialla määrittelyjoukossaan. Ensimmäinen vaatimus derivaatan olemassaololle on, että funktio on jatkuva. Jos funktio ei ole tietyssä kohdassa jatkuva, ei muutosnopeuttakaan tässä kohdassa voi määrittää. Jatkuvuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto derivoituvuudelle.

Riittävä ehto sen sijaan on erotusosamäärän raja-arvon yksikäsitteinen olemassaolo. Tarkemmin ottaen sekä vasemmanpuoleisesta, että oikeanpuoleisesta raja-arvosta tulee saada sama arvo, joka on kyseisen derivaatan arvo. Erotusosamäärän vasemmanpuoleista ja oikeanpuoleista osamäärää sanotaan myös vasemman ja oikeanpuoleiseksi derivaataksi.

Esimerkki 2. Onko paloittain määritelty funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{kun } x < 1 \\ 2x, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 1$?
Tutkitaan ensiksi, onko funktio jatkuva kyseisessä kohdassa. Mikäli funktio ei ole jatkuva, ei se ole myöskään derivoituva. Funktio on määritelty kohdassa $x = 1$ lausekkeella $f(x) = 2x$, minkä johdosta funktion arvo on $f(1) = 2$. Oikealla puolella on sama lauseke, joten funktio on oikealta puolelta jatkuva.
Vasemmalta puolelta lähestyttäessä funktiolla on eri lauseke. Lasketaan funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2+1 = 1^2+1 = 2$$

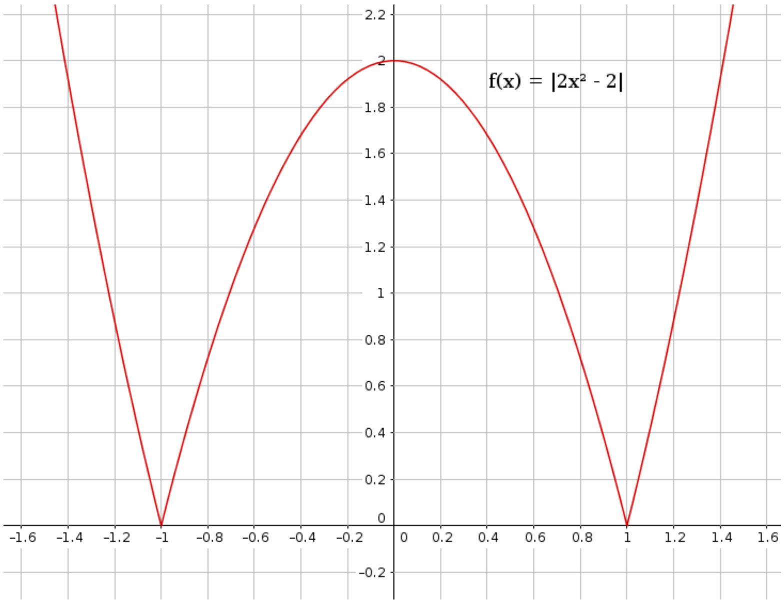
Vasemman puoleinen raja-arvo on siis sama kuin funktion arvo, joten funktio on myös vasemmalta jatkuva. Koska funktio on jatkuva sekä vasemmalta että oikealta, funktio on jatkuva kohdassa $x = 1$.
Koska funktio on jatkuva, se voi olla derivoituva, joten lasketaan erotusosamäärän vasemmanpuoleinen ja oikean puoleinen raja-arvo:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{(x^2+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1-} x+1 = 2$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} 2 = 2$$

Koska oikeanpuoleinen derivaatta on sama kuin vasemmanpuoleinen, on funktio f derivoituva kohdassa $x = 1$ ja derivaatan arvo on $f'(1) = 2$.

Graafinen tulkinta kuvaa tilannetta hyvin. Jos kuvaajalle voi tiettyyn kohtaan piirtää tangentin, funktio on derivoituva tässä kohdassa. Käytännössä tämä vaatii, että kuvaajassa ei ole teräviä kulmia tai epäjatkuvuuksia. Useimmiten ongelmia aiheuttaa vain pieni joukko kohtia, ja derivaatta voidaankin määrittää kaikkialla muualla, paitsi ongelmakohdassa. Esimerkiksi itseisarvofunktioon tulee x-akselille terävä kulma, johon ei voi piirtää tangenttia.

Vaikka kuvan 5 funktiolle ei voi määrittää derivaattaa kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$,



Kuva 5: Funktion $f(x) = |2x^2 - 2|$ kuvaajaan tulee terävät kulmat kohtiin $x = -1$ ja $x = 1$. Näissä pisteissä derivaattaa ei voi määrittää, mutta kaikkialla muualla voi.

on funktio kuitenkin jatkuva käyrä. 1800-luvulla on käyty enemmänkin keskustelua siitä, ovatko kaikki jatkuvat funktiot aina vähintäänkin yhdessä pisteessä derivoituvia. Vuosisadan puolivälissä löytyi useampia funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia, mutta eivät missään derivoituvia. Tunnetuin näistä funktioista on löytäjänsä mukaan nimetty Weierstrassin funktio.

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x) \quad 0 < a < 1, \quad b \, \text{pariton}, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

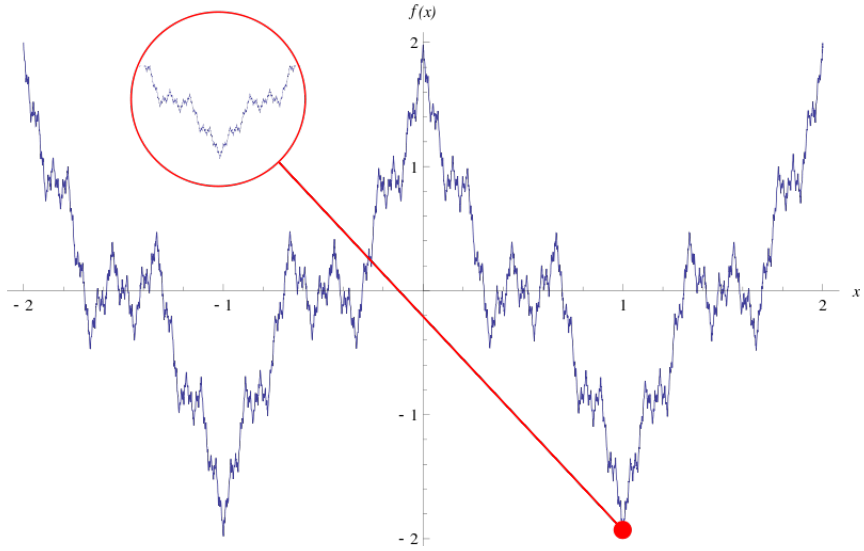
Useimmat yleensä vastaan tulevat funktiot ovat kuitenkin aina derivoituvia. Esimerkiksi polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktiot ja trigonometriset funktiot ovat sekä jatkuvia että derivoituvia koko määrittelyjoukossaan. Sen sijaan tarkkana tulee olla, kun tutkittavana on paloittain määriteltyjä funktioita tai itseisarvoa sisältäviä funktioita.

4 Derivaattafunktio

Derivaatta voidaan laskea jokaisessa pisteessä, jossa funktio on derivoituva, eli kaikkialla, missä kuvaajassa ei ole teräviä kulmia. Funktioa, joka laskee funktion f derivaatan arvoja sanotaan funktion f derivaattafunktioksi, ja sitä merkataan f'. Derivaattafunktio on hyvin määritelty kaikkialla, missä alkuperäinen funktio on derivoituva. Periaatteessa derivaattafunktio ottaa argumentikseen muuttujan x ja funktion sääntö on laskea erotusosamäärän raja-arvo kyseisessä pisteessä. Käytännössä derivaattafunktiolle voidaan yleensä johtaa yksinkertaisempi lauseke, joka palauttaa aina funktion f kuvaajalle kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimen.

Derivaattafunktio voidaan laskea hyödyntäen erotusosamäärän raja-arvoa. Funktio saa muodon lausekkeesta

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{4}$$



Kuva 6: Weierstrassinfunktio on kaikkialla jatkuva, muttei missään derivoituva. Kuvaaja on tavallaan äärettömän kulmikas, sillä jokaisessa pisteessä on kulma. Ei kannata edes yrittää ajatella tätä liian tarkasti.

kuva: public domain

Esimerkki 3. Funktion $f(x) = 3x^2$ derivaattafunktio on

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x^2+2hx+h^2) - 3x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 6x + 3h = 6x.$$

Raja-arvojen laskeminen on kohtalaisen suoraviivaista polynomeille ja tavallisille potenssifunktioille, mutta vaatii usein varsin paljon lausekkeiden muokkaamista, ja toisinaan varsin työläitä sievennyksiä. Onneksi raja-arvoja ei useinkaan tarvitse laskea, kun osataan käyttää derivoimiskaavoja. Myös kaavat johdetaan yleensä raja-arvojen kautta, mutta niitä voidaan luonnollisesti käyttää suoraan sen tarkemmin raja-arvoja pohtimatta.

Esimerkki 4. Esimerkiksi eksponenttifunktion $f(x) = k^x$ derivoimissääntö voidaan johtaa raja-arvona.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k^{x+h} - k^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k^x k^h - k^x}{h} = k^x \lim_{h\to 0} \frac{k^h - 1}{h} = k^x \lim_{h\to 0} \frac{k^{0+h} - k^0}{h} = k^x f'(0).$$

Raja-arvo yleisessä kohdassa x muokkautuu siis raja-arvoksi kohdassa 0.

Toisinaan erilaisia kaavoja voidaan johtaa myös kun tunnetaan muiden funktioiden derivaatoja tai käyttämällä esimerkiksi yhdistetyn funktion derivaattaa. Esimerkiksi luonnollisen logaritmin derivaatta voidaan määrittää lähtemällä liikkeelle ainoastaan x:n derivaatasta:

$$1 = Dx = De^{\ln x} = e^{\ln x} D \ln x \Leftrightarrow D \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Yllä olevassa lausekkeessa on käytetty toista tapaa merkata derivaattaa, eli niin sanottua derivaattaoperaattoria D (tai $\frac{d}{dx}$). Derivaattaoperaattori on matemaattinen toimenpide, joka tarkoittaa derivaattafunktion muodostamista alkuperäisestä funktiosta. Operaattori ei sinänsä ota kantaa siihen, millä menetelmällä derivaatta lasketaan, eli voit käyttää joko derivoimiskaavoja tai erotusosamäärän raja-arvoa. Historiallisesti mielenkiintoinen seikka on, että kehittäessään differentiaalilaskentaa Newton ja Leibniz päätyivät molemmat hyvin samankaltaiseen tapaan, mutta käyttivät eri merkintöjä. Parivaljakon fyysikko, eli Newton käytti merkintänä isoa D-kirjainta, mikä on nykyisemmin jäänyt enemmän matemaatikoiden käyttöön yksiulotteisessa analyysissä. Matemaatikkona tunnetumpi Leibniz sensijaan käytti nykyisin enemmän fyysikoiden käytössä olevaa merkintää $\frac{d}{dx}$, jossa viivan alla ilmaistaan minkä muuttujan suhteen derivointi suoritetaan. Fysiikassa tarvitaan usein derivaattoja useampien kuin yhden muuttujan suhteen, jolloin on kätevää, että merkinnästä näkee suoraan minkä muuttujan suhteen derivointi milloinkin tehdään.

4.1 Derivoimiskaavoja

Käytännössä kaikille tavallisesti vastaan tuleville funktioille on olemassa derivoimiskaavoja, joilla derivaattafunktion voi helposti muodostaa. Usein tarvitaan lisäksi vielä tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion derivaattaa. Muutamia useimmin tarvittuja kaavoja:

- Potenssifunktio: $Dx^n = nx^{n-1}$
- Juurifunktiot: $D\sqrt[n]{x} = Dx^{1/n} = \frac{1}{n}x^{(1-n)/n}$
- Eksponenttifunktiot: $Dk^x = k^x \ln k$
- Neperin luku kantalukuna: $De^x = e^x$
- Luonnollinen logaritmi: $D \ln x = \frac{1}{x}$
- Yleinen logaritm: $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- Trigonometriset funktiot ja arkusfunktiot:
  - $D \sin x = \cos x$
  - $D \cos x = -\sin x$
  - $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$
  - $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

4.2 Yhdistetyn funktion derivaatta

Suurin osa hyödyllisistä funktioista on jollain tapaa yhdistettyjä funktioita. Yhdistetty funktio tarkoittaa funktiota, jonka sisällä on toinen funktio. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

on yhdistetty funktio, koska se koostuu neliöjuurifunktiosta, sekä funktiosta $1+x$. Yhdistettyä funktiota merkitään $g \circ f$, jossa g on niinsanottu ulkofunktio ja f sisäfunktio. Yhdistetyn funktion arvot lasketaan sisäkkäin:

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Yllä olleessa esimerkissä $\sqrt{1+x}$ neliöjuuri on ulkofunktio ja $1+x$ sisäfunktio. Tavallisia alkeisfunktioita ja polynomeja on helppo derivoida kaavalla, mutta monesti vastaan tulee yhdistettyjä funktioita, joille ei kaikille voi olla omaa kaavaansa. Tämän vuoksi yleinen yhdistetyn funktion derivointisääntö on usein erityisen käytännöllinen.

$$Dg(f(x)) = g'(f(x))f'(x) \tag{5}$$

Esimerkki 5. Derivoidaan funktio $(x^2+3)^3$. Merkitään $g(x) = x^3$ ja $f(x) = x^2+3$. Derivoitavana näillä merkinnöillä on siis $g \circ f$. Käyttäen kaavaa (5) saadaan

$$Dg(fx)) = 3(x^2+3)^2 \cdot D(x^2+3) = 3(x^2+3)^2 \cdot 2x$$

Esimerkki 6. Derivoidaan funktio e^{3x^2-x}. Nyt merkitään ulkofunktioa $g(x) = e^x$ ja sisäfunktiota $f(x) = 3x^2 - x$. Derivoidaan funktio $g \circ f$ yhdistetyn funktion kaavalla.

$$De^{3x^2-x} = e^{3x^2-x} \cdot D(3x^2-x) = e^{3x^2-x} \cdot (6x-1)$$

Tätä yhdistetyn funktion derivaattaa kutsutaan itseasiassa *derivoinnin ketjusäännöksi*. Ketjusääntöä voi periaatteessa jatkaa vieläkin pidemmälle. Esimerkiksi kolmen sisäkkäisen funktion derivaatta voidaan laskea ketjusäännöllä:

$$Dh(g(f(x))) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

4.3 Tulon ja osamäärän derivaatta

Usein tulee vastaan tilanteita, jolloin on tarpeen derivoida kahden erillisen funktion tuloa tai osamäärää. Näille löytyy myös omat derivoimissääntönsä. Tulon derivaatta lasketaan

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{6}$$

Esimerkki 7. Derivoidaan tulonderivaatalla funktio x^2e^{2x}. Kaavan 6 merkinnöissä funktiona f on siis x^2 ja funktiona g vastaavasti e^{2x}. Käyttäen kaavaa saadaan

$$Dx^2e^{2x} = 2xe^{2x} + x^2e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}(x^2+x)$$

Osamäärän, eli jakolaskutoimituksen derivointiin on myös kaavansa.

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{7}$$

Verrattuna tulon derivaattaan, on osamäärää derivoitaessa kiinnitettävä huomiota siihen, kummin päin funktiot ovat, sillä miinusmerkki tulee vain toiselle termille.

Osamäärän derivaattoja voi itseasiassa laskea myös käyttämällä tulon derivaattaa ja muuttamalla nimittäjän eksponentiksi -1. Tämä saattaa toisinaan helpottaa derivaatan laskemista, ja vastaavasti toisinaan ei.

$$D\frac{f}{g} = D(fg^{-1}). \tag{8}$$

5 Funktion kulku ja ääriarvot

Eräs derivaatan merkittävimpiä sovelluksia on funktion kulun tutkiminen. Derivaatan merkki kertoo funktion muutosnopeuden suunnan, eli onko funktion arvo kasvamassa vai vähenemässä milläkin hetkellä. Jatkuva ja derivoituva funktio voi vaihtaa kulkusuuntaansa ainoastaan derivaatan nollakohdissa.

5.1 Funktion kulku

Graafisesti tarkasteltuna funktion sanotaan olevan *kasvava*, jos sen kuvaaja kulkee vasemmalta oikealle kuljettaessa ylöspäin, eli funktion arvot kasvavat muuttujan arvojen kasvaessa. Vastaavasti funktio on *vähenevä*, jos funktion arvot pienenevät muuttujan arvojen kasvaessa, eli kuvaaja kulkee alaspäin. Jos funktio on tietyllä lukuvälillä ainoastaan kasvava tai ainoastaan vähenevä, sen sanotaan olevan *monotoninen*.

Tutkimalla derivaatan merkkiä voidaan selvittää algebrallisesti, milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä.

Määritelmä 5.1. Kasvava funktio
Funktio f on lukuvälillä kasvava, jos $f'(x) \geq 0$ koko välillä.

Määritelmä 5.2. Vähenevä funktio
Funktio f on lukuvälillä vähenevä, jos $f'(x) \leq 0$ koko välillä.

Jos edellä olevia määritelmiä tarkastellaan erikoistapauksessa, kuten esimerkiksi vakiofunktion tapauksessa, tullaan siihen lopputulokseen, että esimerkiksi vakiofunktio on samaan aikaan sekä kasvava että vähenevä. Näin ollen toisinaan tarvitaan hieman yksikäsitteisempiä termejä, eli käsitteitä *aidosti kasvava* ja *aidosti vähenevä*.

Määritelmä 5.3. Aidosti kasvava funktio
Funktio f on lukuvälillä aidosti kasvava, jos $f'(x) \geq 0$ kaikkialla lukuvälillä ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä erillisissä pisteissä.

Määritelmä 5.4. Aidosti vähenevä funktio
Funktio f on lukuvälillä aidosti vähenevä, jos $f'(x) \leq 0$ kaikkialla lukuvälillä ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä erillisissä pisteissä.

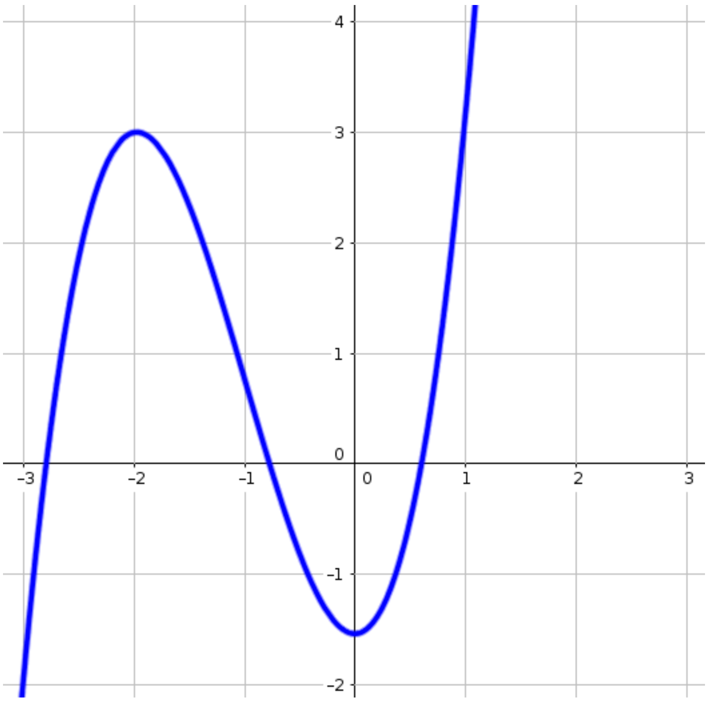
Tässä kohtaa herää helposti kysymys, miksi derivaatan ei vaadita olemaan aidosti suurempaa tai pienempää kuin nolla, vaan sille sallitaan yksittäisiä nollakohtia. Syy tähän on funktiolla mahdollisesti olevat terassikohdat, joissa funktion derivaatta saa hetkellisesti arvon nolla, mutta kyseisen nolla kohdan molemmilla puolilla muutos on samaan suuntaan.

Esimerkki 8. Milloin funktio $f(x) = 2x^2 - 3x$ on aidosti kasvava?
Etsitään derivaatan nollakohdat, ja tutkitaan merkkikaavion avulla, milloin derivaatta saa positiivisia arvoja.
$f'(x) = 4x - 3$, $f'(x) = 0$, kun $4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

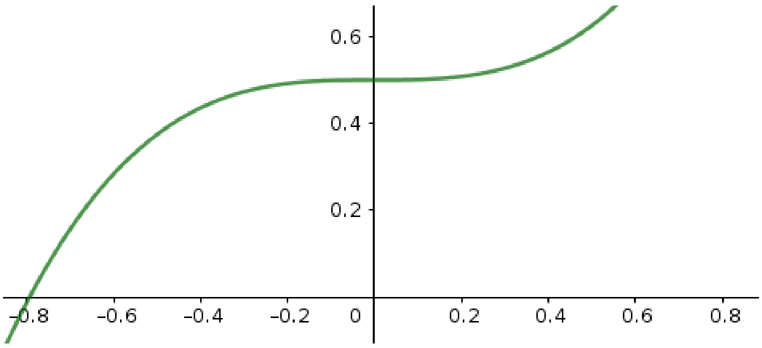
Merkkikaavio:

	$x < \frac{3}{4}$	$x > \frac{3}{4}$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Näin ollen funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq \frac{3}{4}$.



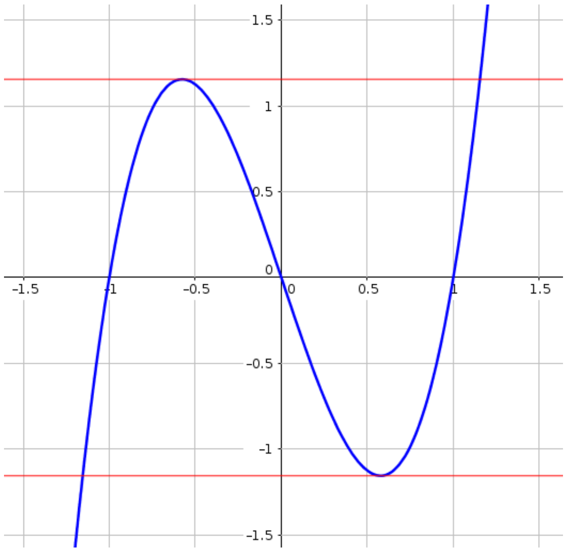
Kuva 7: Kuvan funktio on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -2]$ ja $[0, \infty[$ sekä aidosti vähenevä välillä $[-2, 0]$.



Kuva 8: Kuvan funktion derivaatalla on nollakohta kohdassa $x = 0$, mutta se ei vaihda suuntaansa, joten funktio on aidosti kasvava.

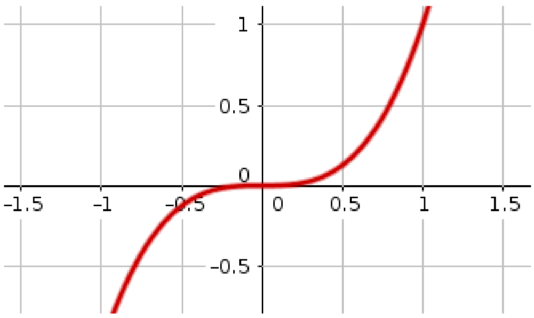
5.2 Ääriarvot

Kohtia joissa funktion kuvaajassa on huippu tai kuopan pohja kutsutaan funktion ääriarvoiksi. Ääriarvot voivat olla siis joko maksimeja tai minimejä. Toisinaan kiinnostavaa on tarkastella paikallisia, eli *lokaaleja* ääriarvoja, mutta usein on tarpeen etsiä funktion suurimpia tai pienimpiä arvoja, eli *globaaleja* ääriarvoja.



Kuva 9: Funktion ääriarvot ovat kuvaajan huippuja tai pohjia. Näihin kohtiin piirretyt tangentit ovat vaakasuoria, eli niiden kulmakerroin on 0. Molemmat kuvan ääriarvot ovat vain lokaaleja, sillä funktio saa muualla sekä suurempia, että pienempiä arvoja.

Jatkuvan funktion ääriarvot löydetään aina derivaatan nollakohdista, joten ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = 0$ saadaan ratkaisuna ääriarvokohdat. Ääriarvon laatu tulee tarkastaa erikseen määrittämällä derivaattafunktion merkkikaavio. Jos funktio muuttuu vähenevästä kasvavaksi ääriarvokohdassa, on kyseessä minimi ja jos funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi on kyseessä maksimi. On myös mahdollista, että derivaatan nollakohdassa ei ole ääriarvoa. Tällöin on kyse niin sanotusta terassikohdasta (oululaisittain "patiopaikka"), jolloin funktion derivaatta saa hetkellisesti arvon nolla, mutta funktio jatkaa kulkuaan samaan suuntaan kuin ennen derivaatan nollakohtaa.



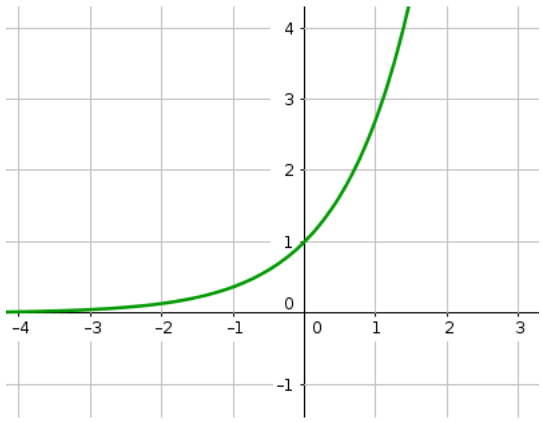
Kuva 10: Funktiolla $f(x) = x^3$ on terassikohta kohdassa $x = 0$.

Funktion globaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan myös funktion suurimmiksi ja pienimmiksi arvoiksi. Tällöin funktiolla on olemassa jokin suurin tai pienin arvo, suurempia tai pienempiä arvoja se ei saa missään muualla. Osalla funktioista ei ole olemassa suurinta tai pienintä arvoa, mutta tarkasteltaessa suljettua väliä, sellaiset voidaan aina löytää.

Polynomifunktioille on olemassa yksinkertaiset säännöt, joilla voidaan tutkia onko funktiolla olemassa suurin tai pienin arvo vai ei.

- Jos polynomin asteluku on pariton, sillä ei ole suurinta tai pienintä arvoa.
- Jos polynomin asteluku on parillinen, sillä on suurin tai pienin arvo.

– Jos parillista astelukua olevan polynomin korkeimman asteen merkki on positiivinen, polynomilla on pienin arvo, mutta ei suurinta arvoa.
– Jos parillista astelukua olevan polynomin korkeimman asteen merkki on negatiivinen, polynomilla on suurin arvo, mutta ei pienintä arvoa.



Kuva 11: Funktiolla e^x ei ole suurinta eikä pienintä arvoa, sillä kun x kasvaa positiivisella akselilla, e^x lähestyy ääretöntä. Negatiivisella akselilla funktion arvot lähestyvät nollaa sitä kuitenkaan koskaan saavuttamatta.

Trigonometrisistä funktioista kosini ja sini saavat suurimmaksi arvokseen 1 ja pienimmäksi arvokseen -1. Eksponenttifunktiolla e^x ei ole suurinta eikä pienintä arvoa siitä huolimatta, että se ei koskaan saa negatiivisia arvoja. Funktion e^x sanotaan olevan *alhaalta rajoitettu*, sillä se ei saa koskaan tiettyä arvoa pienempiä arvoja. Yksittäistä pienintä arvoa sille ei kuitenkaan voi määrittää, sillä aina voidaan kulkea x-akselia hieman pidemmälle vasempaan ja sieltä löytyy aina pienempiä ja pienempiä arvoja.

Usein varsinkin soveltavissa tehtävissä tutkitaan jotain suljettua väliä, jolloin kaikilta funktioilta voidaan löytää suurin ja pienin arvo, kunhan ne on määritelty kyseisellä välillä. Funktion f suurimpien ja pienimpien arvojen löytämiseen suljetulta väliltä $[a, b]$ voidaan käyttää seuraavaa algoritmia:

1. Derivoi funktio
2. Määritä derivaattafunktion f' nollakohdat, sekä mahdolliset kohdat, joissa derivaattaa ei ole määritelty, ja valitse niistä ne, jotka ovat välillä $[a, b]$.
3. Laske funktion arvo valituissa derivaatan nollakohdissa sekä välin päätepisteissä ja valitse saamistasi arvoista suurin ja pienin.

5.3 Soveltavia ääriarvotehtäviä

Funktioiden tutkimuksessa ääriarvot ovat usein mielenkiinnon kohteena. Ääriarvoja voidaan soveltaa optimointiin, eli etsitään optimaalisin mahdollinen tapa käyttää esimerkiksi rahaa tai materiaaleja. Soveltaviin tehtäviin on usein hankala antaa täysin suoraviivaisia ohjeita, mutta ääriarvotehtävien ratkaiseminen etenee yleensä varsin selkeän kaavan mukaan.

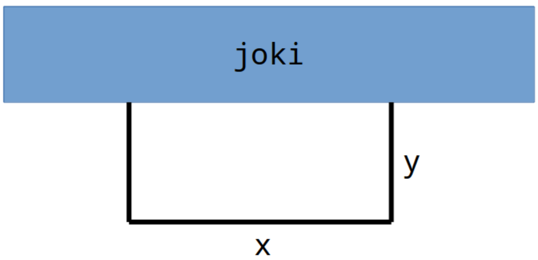
Tyypillisesti ääriarvotehtävässä pyydetään etsimään pienin tai suurin mahdollinen arvo suljetulla välillä. Lisäksi usein mukaan tulee jokin rajoittava tekijä, niin sanottu reunaehto, joka määrää missä rajoissa suurin tai pienin arvo tulee etsiä. Ääriarvoja sovelletaan esimerkiksi jonkin kappaleen tai alueen alueen pinta-alan tai tilavuuden maksimoimiseksi, mutta periaatteessa sovellustehtävissä on vain mielikuvitus rajana. Maksimointi ja minimointitehtäviin voi yrittää soveltaa seuraavanlaista sapluunaa:

1. Mieti tarkkaan mikä on se suure, jonka ääriarvoa etsitään.
2. Muodosta funktio, joka kuvaa kyseistä suuretta. Tässä vaiheessa mukana on usein enemmän kuin yksi tuntematon.
3. Sovella reunaehtoa, ja sijoita sen avulla funktioon tuntematon muuttuja. Reunaehtoja täytyy löytää niin monta, että funktiosta saadaan yhden muuttujan funktio.
4. Derivoi funktio ja etsi derivaattafunktion nollakohdat.
5. Laske funktion arvo derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä. Valitse suurin ja pienin arvo.

Sovelletaan edellistä rakennetta esimerkkiin.

Esimerkki 9. Joen rantaan rakennettavan suorakulmion muotoisen aitauksen kolmeen sivuun on käytettävissä 36 metriä aitaa. Kuinka aitauksen mitat tulee valita, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?
Ratkaisu: Edellisen listan kohtien mukaan:

1. Tehtävänä on maksimoida suorakulmion pinta-ala.
2. Suorakulmion pinta-ala lasketaan kanta kertaa korkeus. Merkitään kantaa x:llä ja korkeutta y:llä, jolloin pinta-alafunktio on $A = xy$.



3. Reunaehtona on, että aitaa on käytettävissä 36 metriä. Tuo 36 metriä koostuu yhdestä kannasta ja kahdesta korkeudesta, joten tästä saadaan yhtälö: $x + 2y = 36$. Yhtälöstä voi ratkaista kumman tahansa muuttujan. Ratkaistaan $x = 36 - 2y$ ja sijoitetaan se pinta-alan lausekkeeseen. Nyt pinta-ala on enää y:n funktio:
$$A(y) = (36 - 2y)y = -2y^2 + 36y$$
4. Pinta-alan derivaatta on
$$A'(y) = -4y + 36,$$
jonka ainoa nollakohta on
$$-4y + 36 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{36}{4} = 9.$$
5. Mahdolliset y: arvojen ääripäät ovat 0 ja 36 metriä, jotka ovat samalla välin päätepisteet. Päätepisteillä suorakulmion pinta-ala on nolla, joten suurin pinta-ala on derivaatan nollakohdassa $y = 9$. Tällöin $x = 36 - 2 \cdot 9 = 18$.

Vastaus: Suorakulmion joen suuntainen pituus on 18 metriä ja lyhyemmät sivut 9 metriä.

6 Matemaattisia malleja

Matemaattisella mallintamisella tarkoitetaan matemaattisen lausekkeen etsimistä kuvaamaan jotain ilmiöä. Lausekkeen etsimiseen voidaan käyttää esimerkiksi havaintopisteitä, joihin voidaan *sovittaa* funktio. Toinen vaihtoehto on käyttää jotain tietoa, kuten kasvu- tai vähenemsprosenttia ja muodostaa lauseke sen perusteella. Usein käyttökelpoinen ja yksinkertainen malli on lineaarinen malli, jossa ilmiöä kuvaa suoran yhtälö. Tällaisen ilmiön kuvaamiseen riittää kaksi havaintopistettä, joiden kautta suora voidaan piirtä. Useamman pisteen joukkoon voidaan muodostaa suora käyttämällä esimerkiksi pienimmän neliösumman menetelmää. Suorat ovat derivoinnin kannalta hieman tylsiä, joten seuraavaksi paneudutaan hieman mielenkiintoisempiin malleihin. Yksinkertaiset funktiot harvoin kuvaavat hyvin monimutkaisia prosesseja, mutta tiettyihin tilanteisiin esimerkiksi eksponenttifunktio sopii erinomaisesti.

Malleja käsiteltäessä tulee muistaa, että mallilla on yleensä jonkinlainen tosimaailmasta johtuva pätevyysalue. Useissa sovelluksissa malleilla ei ole tarkoituskaan kuvata käyttäytymistä kuin tietyllä pienellä alueella. Esimerkiksi bakteerien lisääntymistä kuvaava yhtälö saattaa antaa ennusteeksi, että bakteerien massa saavuttaa hyvin pian Maan massan, mutta todellisuudessa bakteerien lisääntymistä rajoittaa tila ja ravinteiden saanti, eikä viljelmän massa voi todellisuudessa saavuttaa lähellekään näin suuria arvoja.

6.1 Eksponenttifunktio matemaattisena mallina

Jos ilmiön tai asian muutosnopeus riippuu asian senhetkisestä määrästä, voidaan ilmiötä kuvata eksponenttifunktiolla. Tyypillisiä esimerkkejä eksponentiaalisesta kasvusta on esimerkiksi tilille maksettava korko tai eliölajien lisääntyminen. Tavallisimmat esimerkit eksponentiaalisesta vähenemisestä ovat radioaktiivinen hajoaminen, lainan maksu ja lääkeaineen pitoisuus elimistössä.

Eksponentiaalista kasvua käytetään puhekielessä usein synonyyminä erittäin nopealle kasvulle, mutta todellisuudessa eksponentiaalinen kasvu tai väheneminen voi olla myös varsin hidasta. Kasvu riippuu muutoskertoimesta ja siitä, kauanko kasvu jatkuu. Eksponentiaalinen kasvu nimittäin kiihtyy ajan myötä, minkä vuoksi kasvu usein on hyvin nopeaa tai mallin mukaan sellaiseksi lopulta muuttuu. Vastaavasti eksponentiaalinen väheneminen hidastuu ajan myötä. Tämä aiheuttaa esimerkiksi sen, että radioaktiivinen jäte pysyy hieman aktiivisena erittäin pitkään, vaikka voimakkain aktiivisuus katoaisikin hyvin nopeasti.

Yksinkertaiset eksponenttifunktiot toimivat mallina käytännössä aina samalla tavalla. Suureen määrää kuvaava yhtälö on muotoa

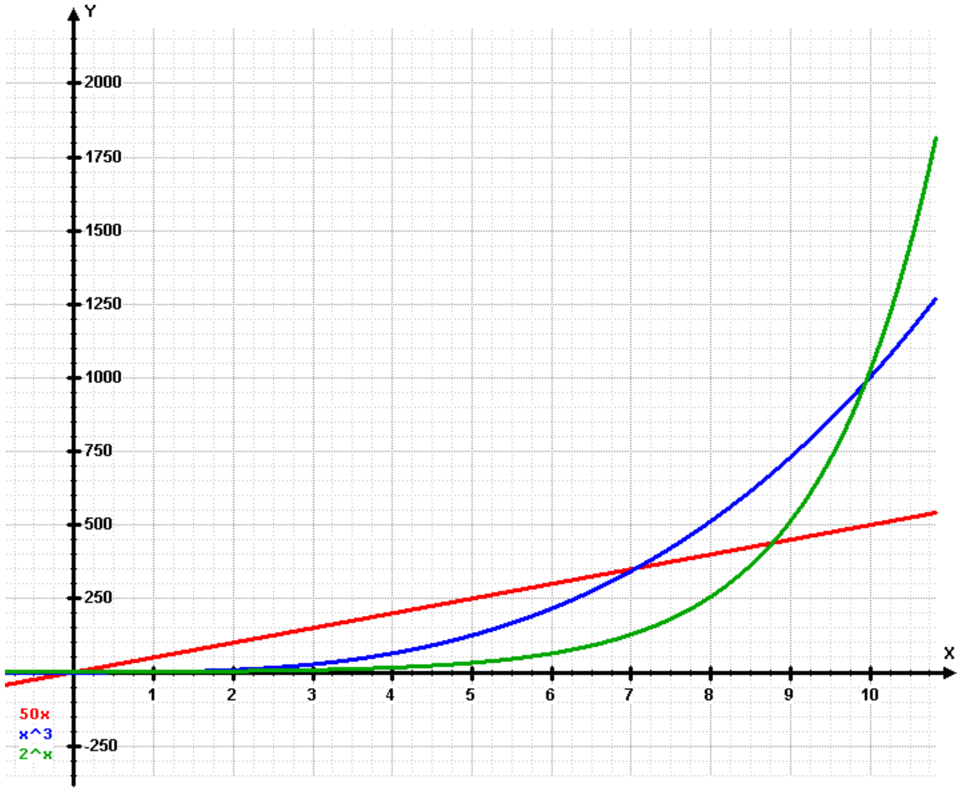
$$A = A_0 k^x, \tag{9}$$

missä A on suureen uusi määrä, A_0 alkuperäinen määrä, k muutoskerroin ja x muutoskertojen lukumäärä. Usein kasvu riippuu ajasta, jolloin muuttujana käytetään x:n tilalla t:tä.

Esimerkki 10. Tilille talletetaan 5000 euroa ja sille maksetaan 1,5% vuosittaista korkoa. Kun tilille ei tehdä muita siirtoja tai nostoja, sillä olevan rahan määrää A kuvaa yhtälö

$$A = 5000 \cdot 1,015^t,$$

missä t on talletuksesta kulunut aika vuosina.



Kuva 12: Kahta suuremmat kantaluvut johtavat hyvin nopeaan eksponentiaaliseen kasvuun (vihreä). Lineaarinen kasvu (punainen) jää lopulta aina eksponentiaalisen ja kuutiollisen (sininen) jalkoihin. Eksponentiaalinen kasvu ohittaa lopulta myös minkä tahansa polynomisen (esim. kuutiollinen) kasvun. Mitä kauemmin kasvu jatkuu, sitä suuremmaksi ero käy.

Muutoskerroin voidaan määrittää, jos tiedetään montako prosenttia muutos on kullakin muutoskerralla. Muutoskerroin saadaan vastaamalla kysymykseen millä luvulla luku pitää kertoa, jotta se vähenee p prosenttia tai kasvaa p prosenttia. Jos luku a kasvaa p% se tarkoittaa, että uusi luku on

$$a + \frac{p}{100}a = (1 + \frac{p}{100})a,$$

eli muutoskerroin on $1 + \frac{p}{100}$. Toisin sanoen, muutoskerroin saadaan siis muuttamalla prosenttiluku desimaaliluvuksi ja lisäämällä se ykköseen. Vastaavasti jos luku vähenee p% saadaan muutoskerroin muuttamalla p desimaaliluvuksi ja vähentämällä se ykkösestä.

Esimerkki 11. Edellisen esimerkin tilille maksettiin korkoa 1,5 %. Tällöin uusi tilin saldo lasketaan kertomalla vanha saldo luvulla $1 + \frac{1,5}{100} = 1,015$.

Esimerkki 12. Vaateliike asetti erän vaatteita 30% alennukseen. Tällöin uusi hinta lasketaan kertomalla vanha hinta luvulla $1 - \frac{30}{100} = 0,7$.

Koska eksponentiaalisessa muutoksessa muutosnopeus riippuu määrästä, on muutoskerroin mahdollista määrittää myös jos tunnetaan montako muutoskertaa tarvitaan esimerkiksi arvon puolittumiseen tai kaksinkertaistumiseen. Tällöin voidaan hyödyntää yhtälöä (9) ja laskea k kun tunnetaan uusi arvo, alkuperäinen arvo ja muutoskertojen lukumäärä.

Esimerkki 13. Niin sanotun radiojodin eli jodin isotoopin 131 puoliintumisaika $T_{1/2} = 8,07$ päivää. Selvitetään montako prosenttia jodista hajoaa päivässä. Merkitään jodin määrää suureella A. Jodin määrä puolittuu puoliintumisajassa, joten muutoskerroin k voidaan ratkaista yhtälöstä $A = A_0k^t$

$$\begin{aligned}
A &= A_0k^t \\
\frac{1}{2}A_0 &= A_0k^{T_{1/2}} \\
\frac{1}{2} &= k^{8,07} \\
k &= \sqrt[8,07]{0,5} = 0,91769348 \approx 0,918
\end{aligned}$$

Eli jodin määrää kuvaavaan eksponenttiyhtälöön saadaan muutoskertoimeksi 0,918 kun muutosten lukumäärä ilmoitetaan päivinä.

6.2 Polynomifunktio mallina

Kun polynomin astelukua kasvatetaan, voidaan sillä approksimoida mitä tahansa funktiota. Niinpä polynomin sovittaminen pistejoukkoon on eräs tavallinen tapa etsiä matemaattista mallia, erityisesti kun mitään selkeää perustetta tietynlaisen käyttäytymisen arvioimiseen ei ole. Tällaista menetelmää kutsutaan sarjakehitelmäksi. Toisinaan polynomifunktio saattaa kuvata ilmiötä sellaisenaankin. Tästä esimerkkinä toimii mm. tasaisesti kiihtyvän liikkeen kuvaus.

6.2.1 Tasainen ja tasaisesti kiihtyvä liike

Fysiikka on ala, joka perustuu tänä päivänä lähes kokonaan matemaattiseen mallintamiseen. Eräs ensimmäisiä malleja jotka tulevat vastaan ovat mallit tasaiselle ja tasaisesti kiihtyvälle liikkeelle. Suureet matka, nopeus ja kiihtyvyys liittyvät toisiinsa tiukasti derivaatan kautta.

Tasaisessa liikkeessä kappaleen, esimerkiksi auton tai junan, nopeus pysyy vakiona. Vakionopeus tarkoittaa sitä, että kappaleen paikka muuttuu jokaisena saman mittaisena aikavälinä saman verran. Näin ollen kappaleen paikan muutosnopeus, eli derivaatta, on vakiofunktio, ja kuten arvata saattaa paikan derivaatta on kappaleen nopeus.

Vastaavasti kappaleen nopeuden muutosta kuvaava suure on kiihtyvyys. Kun nopeus muuttuu tasaisesti, on sen muutosta kuvaava funktio vakio, eli kappaleen kiihtyvyys on vakio. Kiihtyvyys saadaan nopeuden derivaatasta. Fysiikassa nopeus määritetään usein paikan kuvaajasta ja kiihtyvyys nopeuden kuvaajasta graafisesti derivoimalla, mutta mikäli lausekkeet tunnetaan tarkasti, voidaan derivointi suorittaa yhtälailla analyyttisesti. Koska nopeus on paikan derivaatta ja kiihtyvyys nopeuden, on kiihtyvyys tällöin paikan toinen derivaatta ajan suhteen.

$$\begin{aligned}
v(t) &= x'(t) \\
a(t) &= v'(t) = x''(t)
\end{aligned} \tag{10}$$

Tasaisessa nopeudessa kappaleen nopeus on vakio, joten kappaleen paikkaa kuvaava lauseke on ensimmäisen asteen polynomi (huom! muuttujana t).

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Termi x_0 kuvaa lähtöpaikkaa, ja se on matemaattisesti niin sanottu *integroimisvakio*, sillä nopeuden ollessa paikan derivaatta, on paikka tällöin nopeuden integraalifunktio, mutta siihen paneuduttakoon tarkemmin muilla kursseilla.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen nopeuden derivaatta on vakio, eli vastaavasti nopeutta kuvaava lauseke on ensimmäisen asteen polynomi

$$v(t) = v_0 + at.$$

Integroimalla tätä lauseketta edelleen saadaan paikalle lauseke

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Osoitetaan derivoimalla tämän paikkansapitävyys, integroimisen ollessa tämän kurssin tähtäimen ulkopuolella.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= x'(t) = v_0 + 2 \cdot \frac{1}{2}at = v_0 + at \\ a(t) &= x''(t) = a. \end{aligned}$$

Tasaisen liikkeen malli ajan suhteen on ensimmäisen asteen polynomi ja tasaisesti muuttuvan liikkeen malli toisen asteen polynomi. Molemmat mallit toimivat sillä oletuksella, että liike on täydellisen tasaista tai tasaisesti kiihtyvää, mikä on todellisessa maailmassa varsin hankala toteuttaa. Mallit toimivat kuitenkin hyvin usein riittävällä tarkkuudella ja niitä käytetään paljon, koska monimutkaisemmat mallit vaativat aina lisää tietoa tarkasteltavasta systeemistä.

6.2.2 Taylorin polynomi

Käytännön laskuja varten monet funktiot ovat monimutkaisia. Esimerkiksi trigonometristen funktioiden arvojen laskeminen laskimella ei ole kovin yksinkertaista, sillä laskimet ja tietokoneet perustuvat ykkösten ja nollien käsittelyyn. Tätä varten monia funktioita approksimoidaan usein sarjakehitelmällä, mikä mahdollistaa arvojen laskemisen pelkkää kerto- ja yhteenlaskua käyttäen. Sarjakehitelmässä pyritään muodostamaan polynomi, joka on mahdollisimman samanmuotoinen kuin tarkasteltavana oleva funktio. Periaatteessa polynomilla voidaan approksimoida funktiota äärettömän tarkasti, mutta käytännössä käytettävissä oleva laskentateho rajoittaa laskun tarkkuutta.

Tyypillinen approksimaatio on niin sanottu Taylorin polynomi. Taylorin polynomi muodostetaan kaavalla

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{11}$$

Tällöin sanotaan Taylorin polynomin olevan *kehitetty* kohdan $x = a$ ympäristössä. Yleisimmin vastaan tulee erikoistapaus jossa $a = 0$. Tätä kutsutaan Maclaurinin polynomiksi ja se on siis muotota

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{12}$$

Esimerkki 14. Muutamien funktioiden Maclaurinin polynomien ensimmäisiä termejä:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

7 Useamman muuttujan funktiot

Kun funktion arvot riippuvat useammasta kuin yhdestä muuttujasta, on niiden käyttäytymisen hahmottaminen haastavampaa. Muutosnopeutta ei voi selvittää yksikäsitteisesti, vaan se tulee tarkastella jokaisen muuttujan suhteen erikseen. Otetaan käyttöön niin sanottu *osittaisderivaatta*. Osittaisderivaatan avulla tutkitaan, miten useamman muuttujan funktion arvot muuttuvat tietyn muututujan arvojen muuttuessa.

Teknisesti osittaisderivointi ei eroa mitenkään tavallisesta derivoinnista, sillä derivointi suoritetaan aina vain yhden muuttujan suhteen muita pidettäessä tällöin vakiona. Kaikkien muuttujien luonne on kuitenkin syytä pitää aina mielessä. Osittaisderivaattaa merkitään symbolilla ∂ ja koska muuttujia on useampia, on tapana käyttää Leibnizin merkintää ja merkitä esimerkiksi osittaisderivaatta x:n suhteen $\frac{\partial}{\partial x}$.

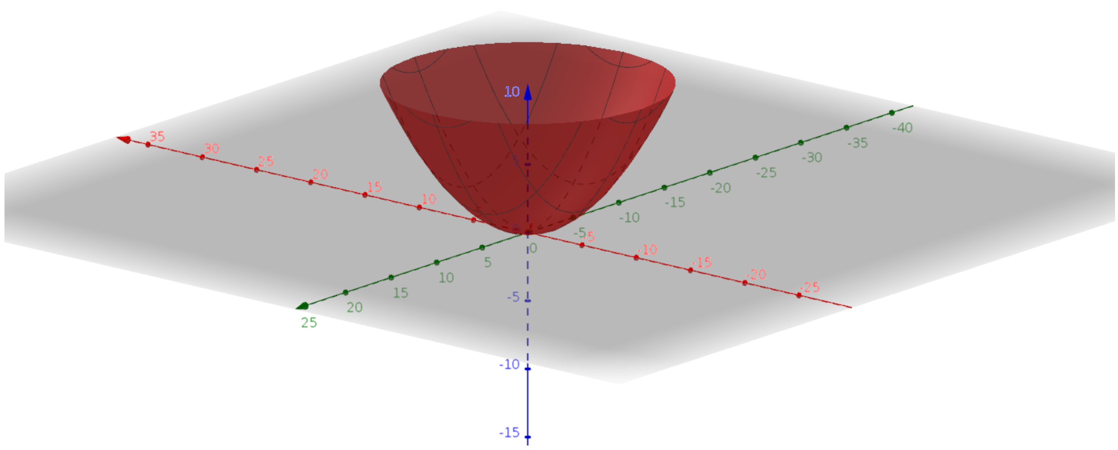
Esimerkki 15. Olkoon funktio $f(x, y) = x^2y - xy^3$. Tällöin funktion osittaisderivaatta x:n suhteen on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2xy - y^3$$

ja vastaavasti y:n suhteen

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^2 - 3xy^2.$$

Yhden muuttujan funktiot voidaan esittää kaksiulotteisessa koordinaatistossa, mutta kahden muuttujan funktioille tarvitaan funktion arvolle kolmas ulottuvuus.



Kuva 13: Kahden muuttujan funktion $f(x, y) = 0,1x^2 + 0,1y^2$ kuvaaja on symmetrisen kulhon muotoinen.

7.1 Gradientti

Tyypillisen derivaatan vastine useampiulotteisessa tapauksessa on *gradientti*. Vastaavalla tavalla kuin derivaatta kuvaa käyrän jyrkkyyttä, eli tangentin kulmakerrointa, gradientti kuvaa edelleen pinnan jyrkkyyttä. Ero perinteiseen derivaattaan on se, että gradientti sisältää tiedon myös suunnasta, johon funktion arvot muuttuvat nopeimmin. Suunnan tullessa peliin mukaan onkin jo selvää, että gradientti on itseasiassa vektori, joka osoittaa pinnan nopeimman muutoksen suuntaan.

Eräs havainnollinen esimerkki on vuori, jonka korkeus pisteessä (x, y) määräytyy funktiosta $h(x, y)$. Tällöin gradienttivektori tietyssä pisteessä osoittaa jyrkimmän rinteen suunnan. Vektorin pituus kertoo kuinka jyrkkä rinne kyseisessä kohdassa on. Gradienttia merkitään käyttämällä *nabla*-symbolia ∇. Funktion h gradientti merkittäisiin siis $\nabla h(x, y)$.

Kolmen muuttujan funktion $f(x, y, z)$ gradientti voidaan laskea osittaisderivaattojen avulla kaavalla

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{13}$$

Jos funktio riippuu vain kahdesta muuttujasta, voidaan viimeinen termi vain jättää pois.

Esimerkki 16. Tarkastellaan vuorta, joka on kutakuinkin funktion $h(x, y) = -x^4 + x^3 + xy + 3y^2 - y^4 + 3$ muotoinen (kts. kuva 14). Olkoon koordinaatiston yksikkö kilometri. Selvitetään gradientin avulla, mikä on vuoren jyrkkyys koordinaatiston pisteissä (1,1) ja (-1,-1).
Lasketaan ensin funktion osittaisderivaatat molempien muuttujien suhteen:

$$\frac{\partial}{\partial x}h(x, y) = -4x^3 + 3x^2 + y$$
$$\frac{\partial}{\partial y}h(x, y) = x + 6y - 4y^3$$

Muodostetaan näiden avulla gradienttivektori kaavan (7.1) mukaisesti:

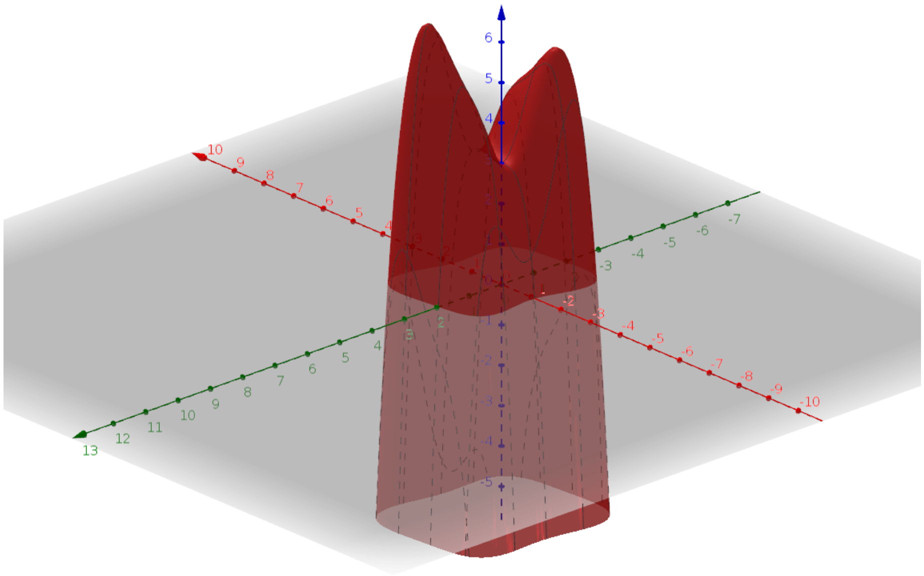
$$\nabla h(x, y) = (-4x^3 + 3x^2 + y)\hat{\imath} + (x + 6y - 4y^3)\hat{\jmath}$$

Rinteen jyrkkyys voidaan siis määrittää missä tahansa pisteessä sijoittamalla pisteen koordinaatit yllä olevaan vektoriin.
Nyt gradienttivektorit pyydeytissä pisteissä ovat

$$\nabla h(1, 1) = (-4 + 3 + 1)\hat{\imath} + (1 + 6 - 4)\hat{\jmath} = 3\hat{\jmath}$$
$$\nabla h(-1, -1) = (4 + 3 - 1)\hat{\imath} + (-1 - 6 + 4)\hat{\jmath} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$$

Ylemmän vektorin pituus on tietysti 3, ja alemman vektorin pituudeksi saadaan $\sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} \approx 6,7$. Rinne on siis tuplasti jyrkempi toisella puolella.

Useamman muuttujan funktiota $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kutsutaan yleisesti skalaarikentäksi. Esimerkiksi huoneen lämpötilaa voidaan kuvata skalaarikentällä, eli funktiolla $T(x, y, z)$, joka liittää jokaiseen huoneen koordinaattiin kyseisen pisteen lämpötilan. Gradientin avulla voidaan tarkastella, missä kohdassa lämpövirta on suurin. Vastaavalla tavalla voidaan käsitellä esimerkiksi painetta ja kosteutta. Skalaari- ja vektorikentät ovatkin paljon käytössä mm. meteorologiassa.



Kuva 14: Funktion $h(x,y) = -x^4 + x^3 + xy + 3y^2 - y^4 + 3$ kuvaaja muistuttaa kaksihuippuista vuorta.

7.2 Suunnattu derivaatta

Gradientti kertoo meille mihin suuntaan funktion arvot muuttuvat kaikkein eniten, ja lisäksi kuinka nopeasti ne muuttuvat tähän kyseiseen suuntaan. Toisinaan voi olla mielenkiintoisempaa tutkia millä nopeudella funktion arvot muuttuvat tiettyyn suuntaan kuljettaessa. Tällöin tarvitaan suunnattua derivaattaa, joka voidaan laskea gradientin avulla. Suunnatulla derivaatalla ei ole täysin vakiintunutta merkintää, mutta usein käytetään merkintöjä

$$D_{\hat{e}}f = f'_{\hat{e}}$$

jotka tarkoittavat funktion f derivaattaa yksikkövektorin $\hat{e}$ suunnassa. Suunnattu derivaatta saadaan gradientin avulla laskemalla:

$$D_{\hat{e}}f = \nabla f \cdot \hat{e},$$

missä $\cdot$ tarkoittaa pistetuloa.

Huomautus 2. Yksikkövektorille käytetään tässä monisteessa ”hattu” -merkintää. Näin ollen vektorin $\bar{v}$ suuntainen yksikkövektori merkitään $\hat{v}$. Yksikkövektori on voidaan laskea jakamalla vektori pituudellaan:

$$\hat{v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

Esimerkki 17. Lasketaan funktion $f(x,y) = x^2 + xy$ suunnattu derivaatta kohdassa (2,3) suuntaan $\bar{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.
Muodostetaan gradienttivektori

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath}$$
$$\nabla f(x,y) = (2x + y)\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$$
$$\nabla f(2,3) = 7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

Seuraavaksi tarivtaan vektorin $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ suuntainen yksikkövektori, joka saadaan jakamalla vektori pituudellaan.

$$\hat{v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$$

Nyt voimme laskea suunnatun derivaatan

$$D_{\hat{v}}f(2,3) = \nabla f(2,3) \cdot \hat{v} = \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}.$$

8 Differentiaaliyhtälöt

Ilmiöiden välisiä riippuvuuksia voidaan usein kuvata jollain yhtälöllä, mutta varsinaista funktiota joka kuvaa jotain suuretta ei aina tunneta. Tällaisissa tilanteissa voidaan usein kirjoittaa yhtälö, joka riippuu paitsi jostain funktiosta, myös kyseisen funktion derivaatoista. Yhtälö, jossa on suure ja suureen derivaatta on nimeltään differentiaaliyhtälö.

Yksinkertainen ensimmäisen kertaluvun (sisältää vain ensimmäistä derivaattaa) differentiaaliyhtälö on yleisesti muotoa

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{14}$$

Yhtälön ratkaiseminen tarkoittaa funktion $y(x)$ lausekkeen selvittämistä. Yllä olevassa yhtälössä muuttujaa x sanotaan riippumattomaksi muuttujaksi ja muuttujaa y riippuvaksi muuttujaksi, koska se riippuu myös muuttujasta x.

Esimerkiksi putoavaan kappaleeseen vaikuttaa gravitaatiovoima $G = mg$. Toisaalta Newtonin toisen lain mukaan voima on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuvan kiihtyvyyden ja massan tulo. Kuten aiemmin jo johdettiin, on kiihtyvyys paikan toinen derivaatta, joten kappaleen korkeuden riippuvuutta ajasta kuvaa yhtälö

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg.$$

Tämä on esimerkki toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä, josta voidaan ratkaista kappaleen korkeus ajan funktiona $h(t)$ suoraan integroimalla.

8.1 Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Erilaisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun on lukematon määrä erilaisia lähestymistapoja, eikä kaikille yhtälöille ole välttämättä mahdollista analyyttistä ratkaisua edes löytää.

Tämän kurssin puitteissa ratkaistaan differentiaaliyhtälöitä muuttujanerottamismenetelmällä, eli separoimalla. Tällaiset yhtälöt ovat muotoa, jossa yhtälön (14) funktio $f(x, y)$ voidaan kirjoittaa kahden funktion tulona, jotka riippuvat vain toisesta muuttujasta, eli yhtälö saa muodon

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{15}$$

Tällainen yhtälö voidaan ratkaista erottamalla muuttujat siten, yhtälön molemmin puolin esiintyy ainoastaan toista muuttujaa, jonka jälkeen yhtälö voidaan integroida puolittain.

Esimerkiksi edellä mainitun putoavan kappaleen korkeus voidaan ratkaista separoimalla.

Esimerkki 18. Ratkaistaan yhtälö $\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$ muuttujanerottamismenetelmällä.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x-5}{y^2} \\
y^2 dy &= (x-5)dx \\
\int y^2 dy &= \int x - 5dx \\
\frac{1}{3}y^3 + C_1 &= \frac{1}{2}x^2 - 5x + C_2 \\
y &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 - 15x + 3(C_2 - C_1)}
\end{aligned}$$

Yleensä on tapana yhdistää kaikki integroimisvakiot yhdeksi, joten voimme kirjoittaa $3(C_2 - C_1) = C$, jolloin yhtälön lopullinen ratkaisu on

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 - 15x + C}$$

Edellisen esimerkin ratkaisuun jäi tuntematon vakio C. Tämä on tyypillistä differentiaaliyhtälöille. Ratkaisuna saadaan ääretön joukko funktioita, jotka riippuvat jostain parametrista. Tämän vakion arvo voidaan ratkaista, jos tunnetaan funktion $y(x)$ arvo jossain pisteessä, eli niin sanottu *alkuarvo*.

Esimerkki 19. Ratkaistaan alkuarvoprobleema $y'(x) = \frac{y-1}{x+3}$, kun tiedetään että $y(-1) = 0$. Erotetaan aluksi muuttujat ja ratkaistaan differentiaaliyhtälö yleisesti:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y-1}{x+3} \\
\int \frac{dy}{y-1} &= \int \frac{dx}{x+3} \\
\ln|y-1| + C_1 &= \ln|x+3| + C_2 \\
\ln|y-1| &= \ln|x+3| + (C_2 - C_1) \\
|y-1| &= |x+3|e^{C_2 - C_1} \quad \text{merkitään } e^{C_2 - C_1} = C \\
|y-1| &= C|x+3| \\
y - 1 &= \pm C(x+3)
\end{aligned}$$

Itseisarvojen poiston jälkeen lausekkeen merkki riippuu muuttujien x ja y arvoista, mutta koska vakiolla C ei ole vielä mitään tunnettua arvoa, voidaan merkki sisällyttää siihen, jonka jälkeen lopullinen yleinen ratkaisu on

$$y = 1 + C(x + 3).$$

Vakion arvo voidaan nyt määrittää alkuehdosta

$$\begin{aligned} y(-1) &= 0 \\ 1 + C(-1 + 3) &= 0 \\ C &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alkuarvoprobleeman ratkaisuna on siten funktio

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}(x + 3) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$