Derivaatta II: Harjoituksia 6

1. Muodosta funktioiden kaikki osittaisderivaatat
   (a) $f(x, y, z) = 3xyz + x^2y + z^2$
   (b) $f(x, y) = 2e^{2x}y^2$
   (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (d) $f(x, y, z) = xz^2 + yx^2 + zy^2$
   (e) $f(x, y, z) = \sqrt{x} + e^{yz^2}$
2. Muodosta gradienttivektori funktiosta $f(x, y, z) = 2xz - y^2$ pisteessä(1,2,3). Laske tämän gradientin suuntainen yksikkövektori.
3. Laske materiaalissa olleen esimerkkivuoren $h(x) = -x^4 + x^3 + xy + 3y^2 - y^4 + 3$ jyrkkyys (suunnattu derivaatta) pisteessä (1,1) suuntaan $\hat{\imath}+\hat{\jmath}$ sekä pisteessä (-1,-1) suuntaan $-\hat{\imath}+\hat{\jmath}$.
4. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = ax^3 - y^5$, missä a on reaaliluku.
   (a) Laske gradientti ∇f.
   (b) Millä parametrin a arvolla funktion suunnatun derivaatan arvo vektorin $\bar{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ suuntaan on
   $$D_{\bar{v}}f(1, 1) = 1$$
5. Laske funktion $f(x, y, z) = xe^{y-z}$ gradientti.

Vastauksia:

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3yz + 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3xz + x^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy + 2z$
   (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4e^{2x}y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4e^{2x}y$
   (c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (d) $\frac{\partial f}{\partial x} = z^2 + 2yx$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2zy$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz + y^2$
   (e) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = z^2 e^{yz^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2yze^{yz^2}$

2. $\nabla f = 6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, yksikkövektori: $\frac{6}{\sqrt{56}}\hat{\imath} - \frac{4}{\sqrt{56}}\hat{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{56}}\hat{k}$

3. suntaan $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$: $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ja suuntaan $-\hat{\imath} + \hat{\jmath}$: $\frac{-9}{\sqrt{2}}$

4. (a) $\nabla f(x, y) = 3ax^2\hat{\imath} - 5y^4\hat{\jmath}$
   (b) $a = \frac{\sqrt{2}+5}{3}$

5. $\nabla f(x, y, z) = e^{y-z}\hat{\imath} + xe^{y-z}\hat{\jmath} - xe^{y-z}\hat{k}$