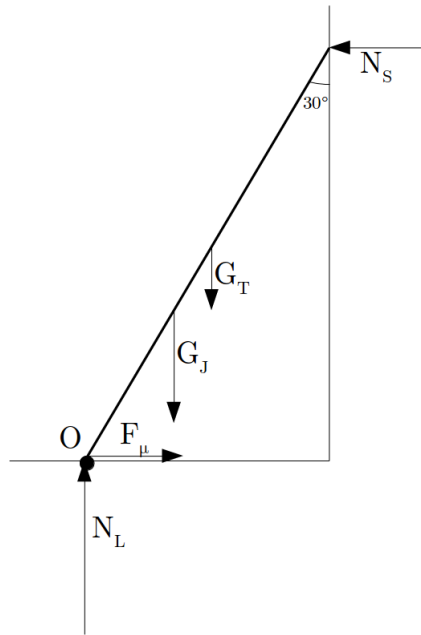


FY 4: Ratkaisut tasapainotehtäviin

1. Jokke ($m=50\text{kg}$) kiipeää kuvan mukaisille 5 puolaisille tikkaille, joiden massa on $m=5\text{kg}$ vain huomatakseen, että tikkaat alkavat liukua alta pois kun hän nousee toiselle askelmalle. Puolien väli on 30 cm, eli koko tikkaiden pituus 1,5 metriä. Joken lähtiessä kiipeämään tikkaiden ja seinän välinen kulma on 30 astetta. Laske tikkaiden ja lattian välinen kitkakerroin.

Ratkaisu: Merkitään tikkaiden pituutta kirjaimella L ja seinän ja tikkaiden välistä kulmaa α . Muodostetaan tasapainoyhtälö tikkaille. Tikkaisiin vaikuttavia voimia ovat tikkaiden oma paino, Joken paino, seinän tukivoima, lattian tukivoima sekä lattian ja tikkaiden välinen kitka.



Kuva 1: Tikkaisiin vaikuttavat voimat

Valitaan momenttipiste lattian ja tikkaiden väliseen kohtaan. Oletetaan, että Joken seisessa toisella puolalla, ollaan tasapainotilanteessa, jossa tikkaat ovat juuri lähdessä liikkeelle. Tällöin lepokitka on täysin kehittynyt, ja voimme laskea lattian ja tikkaiden välisen kitkakertoimen. Vaakasuunnassa vaikuttavia voimia ovat ainoastaan kitka ja seinän tukivoima, joten niiden tulee olla yhtä suuret tasapainotilanteessa. Pystysuunnassa vaikuttaa Joken ja tikkaiden painot sekä lattian tukivoima, joten niiden tulee olla yhtäsuuret. Kitka ja lattian tukivoima vaikuttavat suoraan pisteen O suhteen, joten ainoat voimat joilla on momenttia ovat painovoimat sekä seinän tukivoima. Painot pyrkivät kääntämään tikkaita myötäpäivään ja seinän tukivoima vastapäivään.

$$\begin{cases} F_{\mu} = N_S \\ G_J + G_T = N_L \\ M_J + M_T = M_S \end{cases}$$

Momenttiyhtälöä varten on syytä selvittää voimien varret. Tikkaat muodostavat suorakulmaisen kolmion hypotenuusan, joten seinän tukivoiman varsi on $r_S = L \cos \alpha$. Tikkaiden oma paino kohdistuu tikkaiden keskelle, ja sen varsi mitataan lattiaa pitkin, joten saadaan $r_T = \frac{L}{2} \sin \alpha$. Toinen poikki puu on 60 cm tikkaiden alareunasta, joten Joken painon varsi on $r_J = 0,60 \text{ m} \cdot \sin \alpha$.

Kitkavoima riippuu tukivoimasta sekä kitkakertoimesta $F_\mu = \mu N_L$. Sijoittamalla tämä sekä painot ja voiman varret yhtälöryhmään, tulee se muotoon

$$\begin{cases} \mu N_L = N_S \\ m_J g + m_T g = N_L \\ m_J g r_J + m_T g r_T = N_S r_S \end{cases}$$

Ratkaistaan seinän tukivoima momenttiyhtälöstä:

$$N_S = \frac{m_J g r_J + m_T g r_T}{r_S} = \frac{g(m_J r_J + m_T r_T)}{r_S}.$$

Sijoitetaan tukivoimien lausekkeet ylimpään yhtälöön:

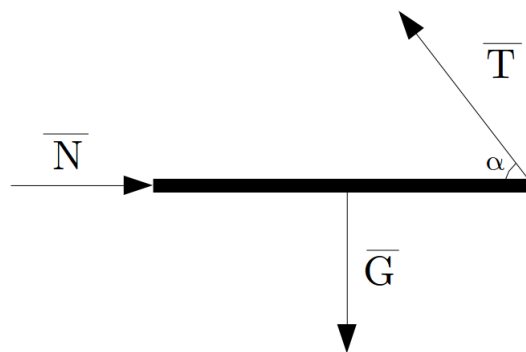
$$\mu(m_J g + m_T g) = \frac{g(m_J r_J + m_T r_T)}{r_S}$$

Ratkaistaan kitkakerroin ja sijoitetaan arvot (huom. putoamiskiihtyvyys g sievenee yhtälöstä):

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{g(m_J r_J + m_T r_T)}{r_S(m_J g + m_T g)} = \frac{m_J r_J + m_T r_T}{r_S(m_J + m_T)} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 0,60 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ + 5 \text{ kg} \cdot 0,75 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ}{1,5 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ (50 \text{ kg} + 5 \text{ kg})} \\ &= 0,2361887 \approx 0,24 \end{aligned}$$

2. Joissakin purjeveneissä käytetään kuvan mukaista vaijeria maston huipusta puomin päähän estämään puomin alas putoaminen silloin, kun isopurje on laskettuna. Laske vaijeriin kohdistuva voima silloin kun puomin pituus on 3,4 m ja massa 15 kg.

Ratkaisu: Piirretään puomin voimakuvio: Tehtävänannon kuvassa puomi, masto ja vai-



Kuva 2: Puomiin vaikuttavat voimat

jeri muodostavat suorakulmaisen kolmion, jossa kateettien pituudet ovat 6,5 ja 3,4 metriä. Vaijerin jännitysvoiman ja puomin välinen kulma saadaan laskettua tangentin avulla:

$$\tan \alpha = \frac{6,5 \text{ m}}{3,4 \text{ m}} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{6,5 \text{ m}}{3,4 \text{ m}} \approx 62,38697^\circ$$

Vaakasuunnassa vaikuttavia voimia ovat maston tukivoima N ja vaijerin jännitysvoiman T vaakasuuntainen komponentti. Pystysuunnassa vaikuttavat puomin paino G sekä jännitysvoiman pystykomponentti. Jännitysvoiman komponentit ovat

$$\begin{aligned} T_x &= T \cos \alpha \\ T_y &= T \sin \alpha \end{aligned}$$

Muodostetaan Newtonin toisen lain mukaiset likeyhtälöt pysty ja vaakasuuntaan sekä momenttiyhtälö maston ja puomin liitoskohdan suhteen.

$$\begin{cases} N = T_x \\ T_y = G \\ Gr_G = T_y r_T \end{cases}$$

Momenttiyhtälössä on syytä huomata, että vain jännitysvoiman y-komponentilla on vääntövaikutusta, sillä x-komponentin vaikutussuora kulkee momenttipisteen kautta. Koska jännitysvoiman ja palkin välinen kulma on tiedossa, ei koko voiman ratkaisemiseksi tarvita kuin jompi kumpi komponenteista. Tämä saadaan momenttiyhtälöstä:

$$T_y = \frac{Gr_G}{r_T} = \frac{mgr_G}{r_T} = \frac{15 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,7 \text{ m}}{3,4 \text{ m}} = 73,575 \text{ N}$$

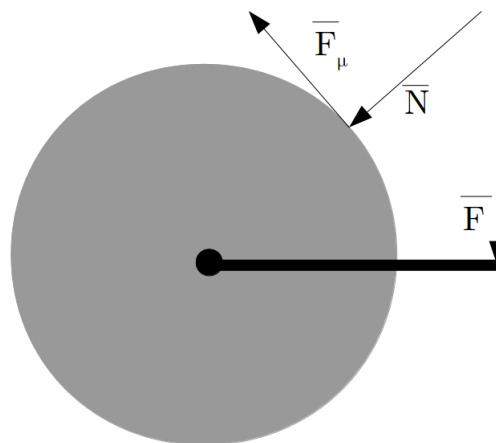
Komponentin avulla saadaan vaijerin jännitys

$$T = \frac{T_y}{\sin \alpha} = \frac{73,575 \text{ N}}{\sin 62,38697^\circ} = 83,032557 \text{ N} \approx 83 \text{ N}$$

3. Tahkon hiomakiven halkaisija on 25 cm ja veivin kammien pituus on 20 cm. Kuinka suuri voima veivissä pitää pyörimisnopeuden vakiona, kun terä painaa kiveä 40 N:n voimalla ja terän ja kiven välinen kitkakerroin on 0,6?

Ratkaisu:

Kiveen vaikuttavista voimista olennaisia ovat kiven pintaan painettavan terän ja kiven välinen kitkavoima sekä kampeen kohdistuva voima. Kitkavoiman varsi on kiven säteen verran, eli 12,5 cm ja kammen voiman varsi on kammien pituus eli 20 cm. Kiven pyöriessä vakionopeudella siihen vaikuttavien momenttien summan tulee olla nolla.



Kuva 3: Hiomakiven pyörimiseen vaikuttavat voimat

Näin ollen momenttiyhtälö kiven keskiakselin suhteen on

$$\begin{aligned}\bar{F}r_f + \bar{F}_\mu r_\mu &= 0 \\ F r_F &= F_\mu r_\mu\end{aligned}$$

Kitkavoiman suuruus riippuu pintojen välisestä tukivoimasta ja kitkakertoimesta. Tukivoiman suuruus on voima, jolla kiveä painetaan tahkoa vasten, eli 40 N. Kitkavoima saadaan $F_\mu = \mu N$. Näin ollen voidaan momenttiyhtälöstä ratkaista

$$F = \frac{F_\mu r_\mu}{r_F} = \frac{\mu N r_\mu}{r_F} = \frac{0,6 \cdot 40 \text{ N} \cdot 0,125 \text{ m}}{0,2 \text{ m}} = 15 \text{ N}$$

Eli mitä pidempi kampi, sitä kevyempi on kiveä pyörittää. Yleensä kammen pituutta voi pidentää varsin rajallisesti, ennen kuin siitä tulee epäkäytännöllinen.