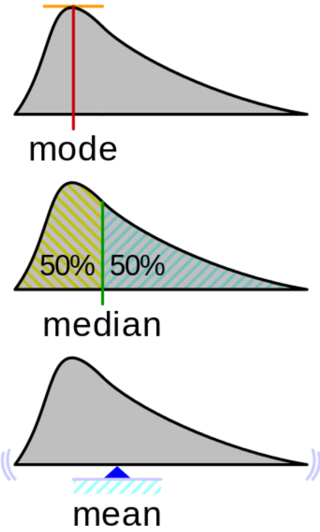
Normaalijakauma

Tapio Hansson

Jatkuva satunnaismuuttuja

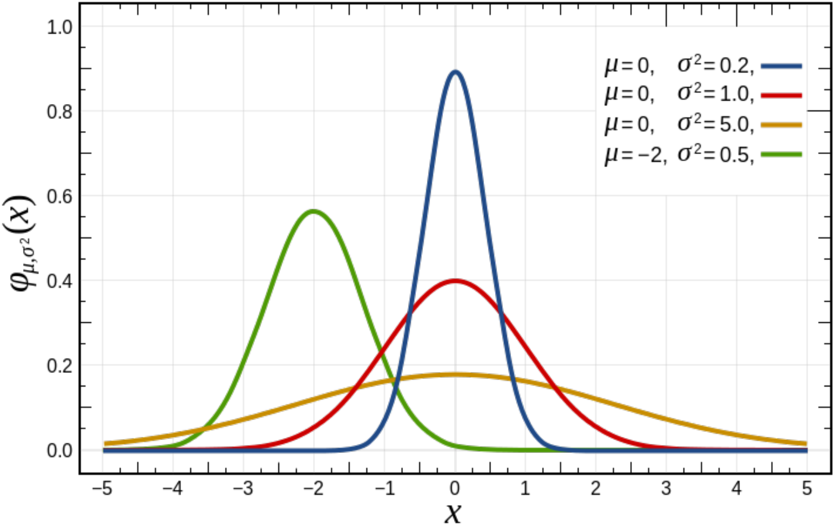
- Koska jatkuvalla satunnaismuuttujalla on ääretön määrä mahdollisia arvoja, on yksittäisen arvon todennäköisyys äärettömän pieni, eli toisin sanoen nolla.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan jakaumaa kuvataan niin sanotulla *tiheysfunktiolla*.
- Satunnaismuuttujan tiettyjen arvojen todennäköisyyttä kuvaa tiheysfunktion ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala. Koko käyrän alle jäävä pinta-ala on 1.



Normaalijakauma

- Normaalijakauma on tyypillisin jakaumatyyppi, jota tulee vastaan. Itseasiassa hämmentävän monet muuttujat noudattavat sitä.
- Normaalijakauman tiheysfunktio on niin sanottu *Gaussin käryä*, joka on funktion e^{-x^2} kuvaaja. Normitetun normaalijakauman (pinta-ala 1) kuvaaja on tarkemmin ottaen
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$
missä μ on muuttujan odotusarvo ja σ jakauman keskihajonta.
- Sanotaan, että satunnaismuuttuja x noudattaa normaalijakaumaa parametrein μ ja σ eli, $x \sim N(\mu, \sigma)$

Normaalijakauma



Normittaminen

- Tyypillisesti muuttujan arvot eivät ole keskittyneet nollan ympärille (kuten normitetussa normaalijakaumassa), vaan jakauma tulee normittaa, jotta normaalijakauman ominaisuuksia voidaan käyttää.
- Normittaminen suoritetaan vähentämällä muuttujan arvosta odotusarvo μ ja jakamalla se keskihajonnalla σ.
- Satunnaismuuttujan X arvon x normitettu vastine z on

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Normitetun jakauman odotusarvo on nolla ja keskihajonta 1.

Kertymäfunktio

- Todennäköisyyksiä voidaan laskea kertymäfunktion avulla. Normitetun normaalijakauman kertomafunktion arvoja voidaan lukea taulukosta.
- Todennäköisyys, että normitettua normaalijakaumaa toteuttavan muuttujan arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin z saadaan suoraan kertymäfunktiosta:

$$P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

- Halutun välin pinta-ala, eli todennäköisyys voidaan laskea vähentämällä kertymäfunktion arvot sopivasti:

$$P(a \leq z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Esim. Tehtävä 324

Esim. Tehtävä 324

Poikalasten syntymäpituuden keskiarvo (tässä tapauksessa jakauman odotusarvo) on 52,0 cm ja keskihajonta 3,5 cm. Merkitään satunnaismuuttujaa X="syntymäpituus".

Esim. Tehtävä 324

Poikalasten syntymäpituuden keskiarvo (tässä tapauksessa jakauman odotusarvo) on 52,0 cm ja keskihajonta 3,5 cm. Merkitään satunnaismuuttujaa X="syntymäpituus". Vastaava normitettu satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X_{-}\mu}{\sigma} = \frac{X - 52,0}{3,5}$$

Esim. Tehtävä 324

Poikalasten syntymäpituuden keskiarvo (tässä tapauksessa jakauman odotusarvo) on 52,0 cm ja keskihajonta 3,5 cm. Merkitään satunnaismuuttujaa X="syntymäpituus". Vastaava normitettu satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X_{-}\mu}{\sigma} = \frac{X - 52,0}{3,5}$$

a) Tn. että syntymäpituus on alle 56 cm on

$$P(x \leq 56) = P(z \leq \frac{56,0 - 52,0}{3,5}) = P(z \leq 1,14) = \Phi(1,14)$$

Taulukosta näemme, että $\Phi(1,14) = 0,8729$, eli tn. on 87%.

b) Yli 50 cm syntymispituuden tn. on

$$P(x \geq 50) = P(z \geq \frac{50-52}{3,5}) = P(z \geq -0,57) = 1 - \Phi(0,57)$$

Jälleen taulukon mukaan $\Phi(0,57) = 0,72$.
c) Välillä 50 - 56 cm syntymisen todennäköisyys saadaan edellisten kertymäfunktioiden arvojen erotuksena.

$$P(50 < x < 56) = \Phi(1,14) - (1 - \Phi(0,57)) = 0,59$$