

Pitkän matematiikan Preliminäärikokeen ratkaisut 2019

Matematiikan preliminäärikokeen malliratkaisut. Vihreällä olevat huomautukset ovat opettajan huomioita tehtävästä, eivät osia vastauksesta.

Tehtävä 2

a)

$$\frac{x^6 x^{10}}{(x^3)^4} = \frac{x^{16}}{x^{12}} = x^4$$

- b) *Huomautus:* Vaillinainen toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista ottamalla muuttuja yhteiseksi tekijäksi ja käyttämällä tulon nollasääntöä. Tehtävän voi ratkaista myös ratkaisukaavan avulla.

$$15x^2 - 3x = 0$$

$$3x(5x - 1) = 0$$

Tulon nollasäännön nojalla

$$3x = 0 \quad \text{tai} \quad 5x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{5}$$

- c) *Huomautus:* Saatetaan molemmat puolet saman kantaisiksi potensseiksi, jolloin voidaan vertailla suoraan eksponentteja. Tehtävä on mahdollista ratkaista myös logaritmien avulla, mutta ratkaisu on verrattuna huomattavan työläs laskimettomassa osiossa.

$$2^{1-x} = \frac{1}{64}$$

$$2^{1-x} = 2^{-6}$$

$$1 - x = -6$$

$$x = 7$$

- d) *Huomautus:* Tangentin kulmakerroin on kyseiseen kohtaan piirretyn derivaatan arvo.

$$f(x) = e^{4x}$$

$$f'(x) = 4e^{4x}$$

$$f'(0) = 4e^{4 \cdot 0} = 4.$$

Derivaattafunktion arvo kohdassa $x = 0$ on 4, mikä on siis tangentin kulmakerroin kyseisessä kohdassa.

TEHTÄVÄ A3

Olkoot vektorit $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$.

a) Laske vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pituudet.

b) Laske pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

c) Laske vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma asteen sadasosan tarkkuudella.

(12 p)

a) Vektorin pituus voidaan laskea yksikkökantavektoreiden kertoimia käyttäen. Laskukaava on löydettävissä MAOL-taulukoista.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

b) Myös pistetulo lasketaan yksikkökantavektoreiden kertoimia käyttäen.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = -6 + 10 + 4 = 8$$

c) Vektoreiden kulman **kosinin** arvo määritetään vektoreiden pituuksia ja pistetuloa käyttäen. Kaikki likiarvot ovat ratkaistavissa KCalc -sovelluksella. Kulmassa oltava sadasosa-asteen tarkkuus!

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8}{3 \cdot 5\sqrt{2}} \approx 0,37712$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{3 \cdot 5\sqrt{2}}\right)$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx \cos^{-1}(0,37712) \approx 67,84^\circ$$

TEHTÄVÄ A4

Määritä funktion $f(x) = x^3(x+4)$ pienin arvo. (12 p)

Funktion pienin arvo (mikäli sellainen on olemassa) voidaan löytää tutkimalla funktion kulkua sen derivaattafunktion arvoja tarkastelemalla (merkkikaavio).

Ennen derivointia avataan sulut, jotta vältetään tulon derivoinnilta (jota toki saa käyttää).

$$f(x) = x^3 \cdot (x + 4) = x^4 + 4x^3$$

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$$

Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4x^3 + 12x^2 = 0$$

$$4x^2 \cdot (x + 3) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$4x^2 = 0 \text{ tai } x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -3$$

Derivaatan merkkiä tarkasteltaessa kannattaa kiinnittää huomiota derivaattafunktion tulomuotoon!

Koska tekijä $4x^2 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, määräytyy derivaattafunktion merkki kokonaisuudessaan tulon toisen tekijän, $x + 3$, merkin mukaan.

$$\text{Kun } x + 3 < 0 \text{ ja } x < -3, \text{ niin } f'(x) < 0$$

$$\text{Kun } x + 3 > 0 \text{ ja } x > -3, \text{ niin } f'(x) > 0$$

Derivaatan nollakohdista vain $x = -3$ on ääriarvokohta, nollakohta $x = 0$ on ns. terassikohta.

Saman asian voi toki varmistaa laskemalla derivaattafunktion arvoja sen nollakohtien rajaamilta osaväleiltä.

$$f'(-4) = 4 \cdot (-4)^2 \cdot (-4 + 3) = 4 \cdot 16 \cdot (-1) = -64$$

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^2 \cdot (-1 + 3) = 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1^2 \cdot (1 + 3) = 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16$$

Merkkikaavion voi laatia auttavasti esim. kuvankäsittelyohjelmalla, mutta derivaatan arvojen lasku riittää perusteluksi. Alla merkkikaavio, joka on tehtyt vastausikkunan matikkaeditorin matriisitoiminnolla.

Merkki- ja kulkukaavio:

x	-4	-3	-1	0	1
$f'(x)$	-		+		+
$f(x)$	vähenevä		kasvava		kasvava
	pienin arvo		terassikohta		

Funktion pienin arvo on $f(-3) = (-3)^4 + 4 \cdot (-3)^3 = 81 + 4 \cdot (-27) = 81 - 108 = -27$

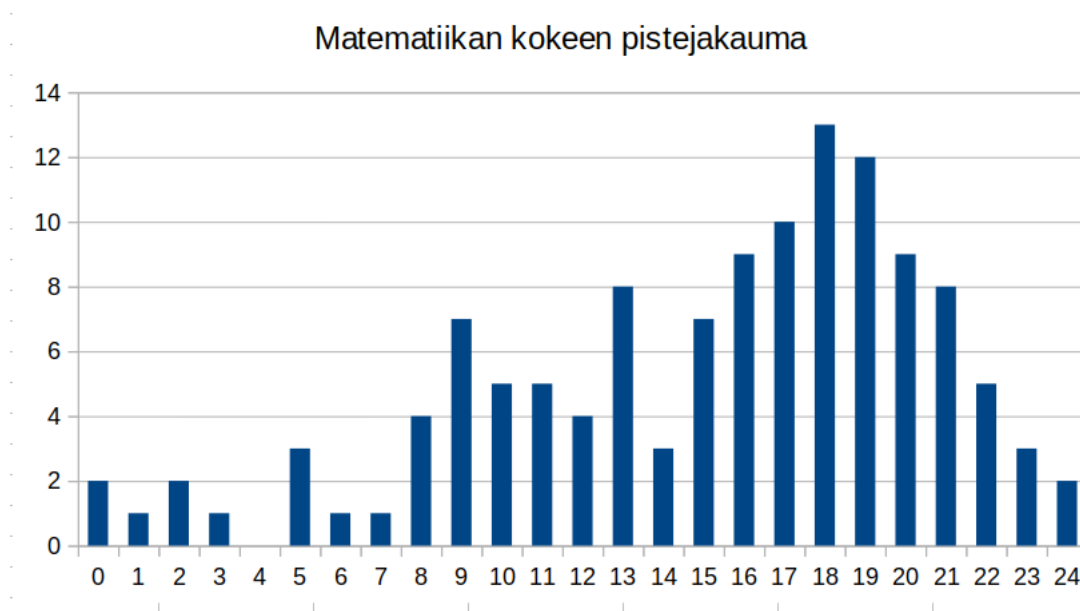
Tehtävä 5

Huomautus: Tehtävän voi tehdä monilla ohjelmistoilla, käytän esimerkissä Calcia, mutta tehtävän voi ratkaista myös Geogebraalla tai laskinohjelmilla. B-kohdan kuvaajan piirto on luultavasti selvästi helpointa tehdä Calcilla. Käsien laskeminen tässä tehtävässä on myös mahdollista, mutta aivan liian työlästä.

- a) *Huomautus:* Ohjevideo summafunktion käyttöön: <http://www.fyma.eu/maa14/teht5a.gif>.

Laskemalla kaikki frekvenssit yhteen taulukkolaskennan summatyökalulla saadaan opiskelijoiden lukumääräksi 125.

- b) *Huomautus:* Ohjevideo pylväskaaviontekoon: <http://www.fyma.eu/maa14/teht5b.gif>. Oikeanlainen kuvaaja tulee suoraan Calcin pylväskaaviolla. Tärkeä kohta on huomata x-akselille tulevat arvot, jotka oletuksena alkavat ykkösestä, mutta pistemäärät sen sijaan nolasta. Niinpä x-akselin arvot tulee asettaa pistemääräksi kohdasta "luokat", kuten videolla näytetään.



- c)
- d) *Huomautus:* Ohjevideo suhteellisiin frekvensseihin: <http://www.fyma.eu/maa14/teht5c.gif>. Suhteellinen frekvenssi saadaan kun yksittäisen arvon frekvenssi jaetaan kokonaismäärällä. Tämä kerrotaan vielä 100:lla jotta saadaan prosenttiluku. Tehtävässä kannattaa hyödyntää Calcin ennakoivaa laskentaa. Eräs tapa saada se toimimaan hyvin on lisätä jokaiseen riviin sarake jossa on kokonaismäärä, ja laskea suhteellinen frekvenssi sen avulla, kuten videolla.

Suhteelliset frekvenssit näkyvät pistemäärittäin oheisesta taulukosta.

pistemäärä	frekvenssi f	yht.	Suht. Frek. (%)
0	2	125	1,6
1	1	125	0,8
2	2	125	1,6
3	1	125	0,8
4	0	125	0
5	3	125	2,4
6	1	125	0,8
7	1	125	0,8
8	4	125	3,2
9	7	125	5,6
10	5	125	4
11	5	125	4
12	4	125	3,2
13	8	125	6,4
14	3	125	2,4
15	7	125	5,6
16	9	125	7,2
17	10	125	8
18	13	125	10,4
19	12	125	9,6
20	9	125	7,2
21	8	125	6,4
22	5	125	4
23	3	125	2,4
24	2	125	1,6

- e) *Huomautus:* Ohjevideo keskiarvoon: <http://www.fyma.eu/maa14/teht5d.gif>. Keskiarvo on helppo laskea vaikka käsinkin. Videolla vinkki, miten sen saa kohtalaisen kätevästi laskettua Calcin avulla.

Kaikkien jaettujen pisteiden summa on 1886, jolloin keskiarvoksi saadaan

$$\frac{1886}{125} = 15,088 \approx 15,1$$

- f) *Huomautus:* Ohjekuva keskihajontaan: <http://www.fyma.eu/maa14/teht5e.png>. Keskihajonnan voi laskea käsin käyttäen taulukkolaskentaa hyväksi, tai suoraan keskihajontakomennolla kuten oheisessa kuvassa. Komennon ongelma on, että se ei huomioi frekvenssiä, ellei tee kuten kuvassa ja kirjoita jokaisen oppilaan pistemäärää omaan soluun.

Keskihajonnaksi tulee taulukkolaskentaohjelman komentoa käyttäen 5,5.

TEHTÄVÄ B6

Tarkastellaan yhtälöä $(a + 1)x^2 + 2(a - 1)x - 2 = 0$.

a) Osoita, että yhtälöllä on ratkaisuja kaikilla parametrin a arvoilla.

b) Millä parametrin a arvoilla ratkaisut ovat erimerkkiset?

(12 p)

a) On tärkeää huomata, että yhtälö ei ole toisen asteen yhtälö kaikilla parametrin a arvoilla, vaikka se siltä päällisin puolin voi näyttää!

Kun $a = -1$, saa yhtälö ensimmäisen asteen yhtälön muodon, koska toisen asteen termin kertoimen arvoksi tulee nolla.

$$(a + 1)x^2 + 2(a - 1)x - 2 = 0 \quad \text{Sijoitetaan } a = -1$$

$$(-1 + 1)x^2 + 2(-1 - 1)x - 2 = 0$$

$$2 \cdot (-2)x - 2 = 0$$

$$-4x - 2 = 0$$

Tällä yhtälöllä on **yksi ratkaisu**

$$-4x = 2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Kun $a \neq -1$, on yhtälö toisen asteen yhtälö ja sen ratkaisujen lukumäärä voidaan selvittää yhtälön diskriminantin arvon avulla. Lasketaan diskriminantin arvo. (Sievennyksen voi tehdä nopeasti esim. laskinohjelmiston Simplify-komennolla)

$$D = [2 \cdot (a - 1)]^2 - 4 \cdot (a + 1) \cdot (-2)$$

$$D = 4 \cdot (a - 1)^2 + 8 \cdot (a + 1)$$

$$D = 4 \cdot (a^2 - 2a + 1) + 8a + 8$$

$$D = 4a^2 - 8a + 4 + 8a + 8$$

$$D = 4a^2 + 12$$

Koska $4a^2 \geq 0$, kaikilla a :n arvoilla, niin $D = 4a^2 + 12 > 0$, kun $a \neq -1$.

Koska diskriminantin arvo on aina positiivinen, on toisen asteen yhtälöllä aina **kaksi erisuurta** reaalilukuratkaisua.

Yhtälöllä $(a + 1)x^2 + 2(a - 1)x - 2 = 0$ on siis ratkaisuja kaikilla parametrin a arvoilla. $\square$

b) Jotta ratkaisut voivat olla erimerkkiset, täytyy niillä olla kaksi kappaletta, eli tarkastellaan tilannetta, jossa yhtälö on toisen asteen yhtälö ja $a \neq -1$. Ratkaistaan yhtälö ratkaisukaavaa (tai laskinta) käyttäen hyödyntäen jo edellä laskettua diskriminantin arvoa.

Jotta ratkaisut olisivat erimerkkiset, täytyy nollakohtien tulo olla negatiivinen. Ratkaistaan yhtälö ja nollakohtien muodostama epäyhtälö esim. GeoGebra5 CAS-laskimella:

CAS	
1	Ratkaise((a+1)*x^2+2*(a-1)*x-2=0) $\rightarrow \left\{ x = \frac{-a+1+\sqrt{a^2+3}}{a+1}, x = \frac{-a+1-\sqrt{a^2+3}}{a+1} \right\}$
2	$x1:=(-a+1+\sqrt{a^2+3})/(a+1)$ $\rightarrow x1 := \frac{-a+\sqrt{a^2+3}+1}{a+1}$
3	$x2:=(-a+1-\sqrt{a^2+3})/(a+1)$ $\rightarrow x2 := \frac{-a-\sqrt{a^2+3}+1}{a+1}$
4	Ratkaise(x1*x2<0,a) $\rightarrow \{a > -1\}$

HUOM! Ratkaisujen merkkien tutkimista varten voi myös tutkia erikseen tilanteita, joissa $a < -1$ ja $a > -1$ jo pelkästään siksi, että näillä lukuväleillä funktion kuvaajaparaabelit aukeavat eri suuntiin.

Kun lisäksi huomataan (vaikkapa GeoGebraalla hahmotellen), että kaikki paraabelit kulkevat pisteiden (0,-2) ja (-2,6) kautta¹, niin on helppo todeta, että

- alaspäin aukeavilla paraabeleilla (kun $a < -1$) on aina samanmerkkiset, negatiiviset nollakohdat, ja
- ylöspäin aukeavilla paraabeleilla (kun $a > -1$) on aina erimerkkiset nollakohdat.

¹ $f(0) = (a+1) \cdot 0^2 + 2(a-1) \cdot 0 - 2 = -2$

$f(-2) = (a+1) \cdot (-2)^2 + 2(a-1) \cdot (-2) - 2 = 4(a+1) - 4(a-1) - 2 = 4a + 4 - 4a + 4 - 2 = 6$

TEHTÄVÄ B7

Liitteenä olevassa dynaamisessa kuviossa [kuvio.ggb](#)

- 1) pisteiden A ja B paikat ovat kiinteät ja niiden etäisyys on 6,
- 2) pisteet C ja D ovat janan AB keskinormaalilla ja
- 3) janan CD pituus on 4.

Lataa [kuvio.ggb](#)

Pistettä C voidaan liikuttaa pitkin janan AB keskinormaalialia, siten että janan CD pituus on koko ajan 4.

- a) Laske alkuperäisen kuvion eli nelikulmion ADBC ala. (4 p)
- b) Liikuttele pistettä C. Miten pisteen C paikan vaihtaminen vaikuttaa kuvion alaan? (2p)
- c) Todista b)-kohdan väitteesi huomioiden eri vaihtoehdot. (6p).
- (12 p)

a) Nelikulmion voi ajatella koostuvan kahdesta kolmiosta ACD ja BCD . Jos näiden molempien kolmioiden kannaksi valitaan sivu CD , jonka pituus on 4. Tällöin kolmion kantaa vastaavat kärkipisteet ovat pisteet A ja B. Koska korkeusjanan pituus on kantaa vastaavan kärkipisteen etäisyys kannalta tai kannan jatkeesta, ovat molempien kolmioiden korkeusjanojen pituudet 3. Tämä siksi, että janan AB keskinormaali on suora, jolla sijaitsee kanta ja sen kaikki jatkeet.

Kolmioiden alat ovat siis samat, ja nelikulmion $ADBC$ pinta-ala on

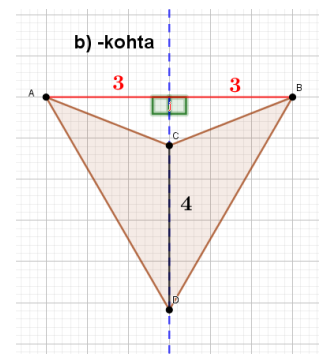
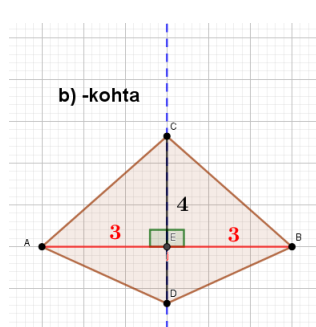
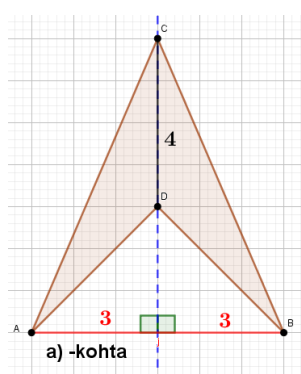
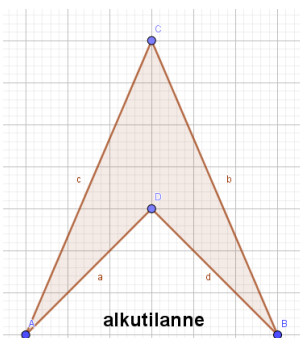
$$A_{ADBC} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$$

b) Ala ei muutu.

c) Väite on todistettu jo kohdassa a), kun tuli todetuksi kannan pituuden ja korkeusjanan pituuden muuttumattomuus. Ratkaisussa kuitenkin ilmeisesti halutaan esittää eri tilanteet

- kanta janan AB ”yläpuolella”
- kanta janan AB leikkaamana ja
- kanta janan AB ”alapuolella”.

joissa pinta-ala on joka tilanteessa sama a) -kohdassa mainituilla perusteluilla.



Tehtävä 8

Huomautus: Tehtävä vaatii varsin paljon integraalien laskemista, minkä vuoksi tehtävä on kätevintä tehdä laskinohjelman avulla. Oheinen esimerkki on laadittu Geogebrailla.

a) Y-akselin ympäri pyörähtävän funktion $f(x)$ muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan integraalista:

$$\pi \int_0^a g(y)^2 dy,$$

missä funktio $g(y) = x$ on ratkaistu yhtälöstä $y = f(x)$.

Laaditaan ratkaisu laskinohjelmalla:

1	Määritellään funktiot:	
2	$f(x) := x^2$	
☒	$\rightarrow f(x) := x^2$	
3	$g(x) := x^3 $	
☒	$\rightarrow g(x) := x^2 x $	
4	Koska pyörähdyskappale muodostuu y-akselin suhteen, määritetään integroitavat funktiot:	
5	Ratkaise($f(x) = y, x, y > 0$)	
☐	$\rightarrow \{x = \sqrt{y}, x = -\sqrt{y}\}$	
6	Ratkaise($g(x) = y, x, y > 0$)	
☐	$\rightarrow \{x = \sqrt[3]{y}, x = -\sqrt[3]{y}\}$	
7	Molempia käyriä integroidaan korkeudelle a, jossa tilavuudet ovat yhtä suuret. Muodostetaan tilavuudesta korkeuden funktiot:	
8	$Vf(a) := \pi \int_0^a \sqrt{y}^2 dy$	
☒	$\rightarrow Vf(a) := \frac{1}{2} a^2 \pi$	
9	$Vg(a) := \pi \int_0^a (y^{\frac{1}{3}})^2 dy$	
☒	$\rightarrow Vg(a) := \frac{3}{5} a \pi \sqrt[3]{a}^2$	
10	Ratkaise($Vf(a) = Vg(a), a$)	
☐	$\rightarrow \left\{ a = 0, a = \frac{216}{125} \right\}$	
11	Lasketaan tilavuus saadulla korkeudella:	
12	$Vf\left(\frac{216}{125}\right)$	
☐	$\rightarrow \frac{23328}{15625} \pi$	
13	Lukuarvona(\$12)	
☐	$\rightarrow 4.6903726991$	

Tilavuudeksi saatiin siis n. 4,69.

b) Muodostetaan vastaavalla tavalla tilavuus myös funktiolle $y = |kx|$ ja ratkaistaan k , kun sekä korkeus, että tilavuus ovat samat kuin a-kohdassa.

12	$Vf\left(\frac{216}{125}\right)$
☐	$\rightarrow \frac{23328}{15625} \pi$
13	Lukuarvona(\$12)
☐	$\rightarrow 4.6903726991$
14	b-kohta
15	$h(x) := k x $
☐	$\rightarrow h(x) := k x $
16	Ratkaise($y = h(x), x, y > 0$)
☐	$\rightarrow \left\{ x = \frac{y}{ k }, x = -\frac{y}{ k } \right\}$
17	Integraali tulee laskea samalle korkeudelle kuin aiempien funktioiden tapauksessa. Muodostetaan nyt tilavuudesta k:n funktio ja ratkaistaan k, kun tilavuudeksi saadaan sama arvo.
18	$Vh(k) := \pi \int_0^{\frac{216}{125}} \left(\frac{y}{ k }\right)^2 dy$
☒	$\rightarrow Vh(k) := \frac{3359232}{1953125} \cdot \frac{\pi}{k^2}$
19	Ratkaise($Vh(k) = \$12, k$)
☐	$\rightarrow \left\{ k = -12 \cdot \frac{\sqrt{5}}{25}, k = 12 \cdot \frac{\sqrt{5}}{25} \right\}$

TEHTÄVÄ B9.1

Fibonacci lukujono $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ määritellään rekursiivisesti siten, että lukujonon seuraava jäsen on kahden edellisen summa. Lisäksi $F_1 = F_2 = 1$.

a) Määrittele Fibonacci lukujonon rekursiokaava. (3p)

b) Tutki (valitsemallasi menetelmällä), mikä on Fibonacci lukujonon suurin kuusinumeroinen luku. Kuinka mones lukujonon jäsen se on? (3p)

c) Kultainen leikkaus saadaan, kun jana jaetaan kahteen osaan niin, että lyhyemmän osan suhde pidempään osaan on sama kuin pidemmän osan suhde koko janaan. Tämä kultainen suhde on arvoltaan $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Fibonacci peräkkäisten jäsenten suhde lähtyy kultaisen leikkauksen suhdetta. Tutki, milloin jonon jäsenten suhde on kolmen desimaalin tarkkuudella sama kuin kultaisen leikkauksen suhde. (6p)

a) Fibonacci lukujonon (F_n) rekursiokaava:

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ ja}$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ kun } n = 3, 4, 5, \dots$$

b) Fibonacci lukujonon jäseniä voidaan helposti laskea taulukkolaskentaohjelman, kuten esimerkiksi LibreOffice Calcin avulla. Taulukkolaskennan soluviittaukset ovat näppärä tapa luoda rekursio.

Kirjoitetaan taulukon sarakkeille otsikot, alaindeksit saa käyttöön Muotoilu/Fontti... -valinnasta. Kirjoitetaan ensimmäiseen sarakkeeseen kaksi ensimmäistä järjestysnumeroa, ja toiseen sarakkeeseen alkuarvot $F_1 = F_2 = 1$.

B3			
	A	B	C
1	n	F_n	
2	1	1	
3	2	1	

Jatketaan jonon kehittelyä. B-sarakkeeseen halutaan laskea aina kahden edellisen jonon jäsenen summa yläpuolisista soluista. Tehdään se soluviittauksin (soluviittaus on käytettävän luvun osoite taulukossa). Jonon kolmas jäsen laskettaisiin soluun B4 komennolla $=B2+B3$, neljäs jäsen soluun B5 komennolla $=B3+B4$ jne. Sen sijaan, että jokaiseen tulevaan soluun kirjoittaisi komennon aina käsin uudelleen ja uudelleen, voi sen kopioida sarakkeella alaspäin valitsemalla ensimmäisen laskukomennon sisältävän solun (B4), viemällä kohdistimen solun oikeassa alanurkassa olevan pikkuneliön päälle, painamalla hiiren vasen painike pohjaan ja ”raahaamalla” hiirellä osoitinta alaspäin riittävän pitkälle.

NELIÖJUURI			
	A	B	C
1	n	F_n	
2	1	1	
3	2	1	
4	3	$=B3+B2$	

B4			
	A	B	C
1	n	F_n	
2	1	1	
3	2	1	
4	3	2	
5	4		

B4:B20			
	A	B	C
1	n	F_n	
2	1	1	
3	2	1	
4	3	2	
5	4	3	
6	5	5	
7	6	8	
8	7	13	
9	8	21	
10	9	34	
11	10	55	
12	11	89	
13	12	144	
14	13	233	
15	14	377	
16	15	610	
17	16	987	
18	17	1597	
19	18	2584	
20	19	4181	
21			

F34			
	A	B	C
1	n	F_n	
20	19	4181	
21	20	6765	
22	21	10946	
23	22	17711	
24	23	28657	
25	24	46368	
26	25	75025	
27	26	121393	
28	27	196418	
29	28	317811	
30	29	514229	
31	30	832040	
32	31	1346269	
33	32	2178309	

Taulukoiduista arvoista huomataan, että suurin kuusinumeroinen jäsen Fibonaccin lukujonossa on

$$F_{30} = 832\,040.$$

c) Kultaisen suhteen likiarvo on

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Täydennetään edellä laadittua taulukkoa C-sarakkeeseen laskettavilla lukujen suhteilla alkaen C3-solusta, johon suhde F_2/F_1 saadaan soluviittauksilla seuraavasti =B3/B2, muut suhdet luvun saadaan oikein ja paikalleen valitsemalla tämä solu viittauksineen ja kopioimalla se alaspäin kuten edellä tehtiin summia laskettaessa.

C3			
	A	B	C
1	n	F_n	F_n/F_{n-1}
2	1	1	
3	2	1	1
4	3	2	

G13				
	A	B	C	D
1	n	F_n	F_n/F_{n-1}	
2	1	1		
3	2	1	1,000	
4	3	2	2,000	
5	4	3	1,500	
6	5	5	1,667	
7	6	8	1,600	
8	7	13	1,625	
9	8	21	1,615	
10	9	34	1,619	
11	10	55	1,618	
12	11	89	1,618	
13	12	144	1,618	
14	13	233	1,618	

Lukujen suhde on kolmen desimaalin tarkkuudella sama kuin suhteen tarkka arvo 10. jäsenen kohdalla.

Tehtävä 9.2

a) *Huomautus:* Bolzanon lauseen mainitseminen on tärkeä kohta tehtävää. Tarkastelua voi käyttää vain jatkuvalle funktiolle.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^{2x} - e^x$. Funktio on selvästi jatkuva tarkasteluvälillä, joten sillä on Bolzanon lauseen nojalla nollakohta kyseisellä välillä, mikäli se saa erimerkkiset arvot joissain välin pisteissä. Tarkastellaan päätepisteitä:

$$f(1) = 1^{2 \cdot 1} - e^1 = 1 - e \approx -1,72 < 0$$

$$f(2) = 2^{2 \cdot 2} - e^2 = 16 - e^2 \approx 8,61 > 0$$

Koska funktio saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä, sillä on nollakohta kyseisellä välillä.

b) Sekanttimenetelmän iterointikaava on

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Määritellään funktio f Geogebraan ja kirjoitetaan iterointikaava taulukkolaskentaan. Käytetään alkuarvauksina välin päätepisteitä $x_0 = 1$ ja $x_1 = 2$.

Iteraatiokaava määriteltiin lausekkeella:

Luku A3

L2707

A2 - f(A2) (A2 - A1) / (f(A2) - f(A1))

Ja laskun tuloksena saatiin:

Funktio		A	
1	$f(x) = x^{2x} - e^x$	1	1
2		2	2
3		1.1663514646	
4		1.3090530857	
5		3.7108524871	
6		1.3092929978	
7		1.3095328367	
8		2.4748820969	
9		1.3344386738	
10		1.3582448052	
11		2.1799787262	
12		1.4160176601	
13		1.4650104793	
14		1.816813475	
15		1.5801572034	
16		1.62509336	
17		1.6528254016	
18		1.6484935739	
19		1.6487191266	
20		1.6487212718	
21		1.6487212707	
22		1.6487212707	
23		1.6487212707	

Menetelmä suppeni arvoon $x = 1,649$.

Tehtävä 10

a) Hehkulamppu kestää vähintään 2200 tuntia, mikä tarkoittaa 2200 tuntia tai enemmän. Yhden hehkulampun todennäköisyys saadaan integroimalla tiheysfunktiota. Integrointi riittää suorittaa välillä $[2,2;2,5]$, sillä nolalla ei ole vaikutusta integraalin arvoon. Määritellään funktio ja lasketaan integraali laskinohjelmalla.

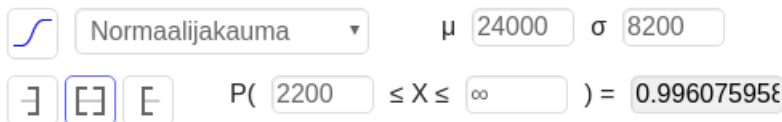
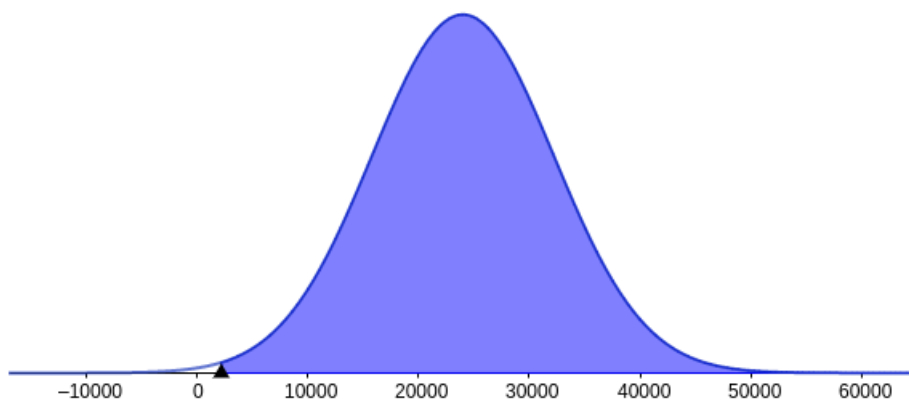
1	$f(x) := -6t^2 + 24t - 22.5$	
	$\rightarrow f(x) := -6t^2 + 24t - \frac{45}{2}$	
2	Integraali(f(x), 2.2, 2.5)	
	$\rightarrow \frac{27}{125}$	
3	Lukuarvona(\$2)	
	$\rightarrow 0.216$	

Kaikkien viiden hehkulampun todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä:

$$P(5 \text{ kestää väh. } 2200 \text{ h}) = (0.216)^5 = 0,000470185 \dots \approx 0,00047 = 0,047\%$$

b) Yhden energiansäästölamppun todennäköisyys kestää 2200 tuntia saadaan normaalijakaumasta. Käyttäen Geogebrian todennäköisyyslaskuria saadaan yhden lampun todennäköisyydeksi kestää 2200 tuntia n. 0,99607596

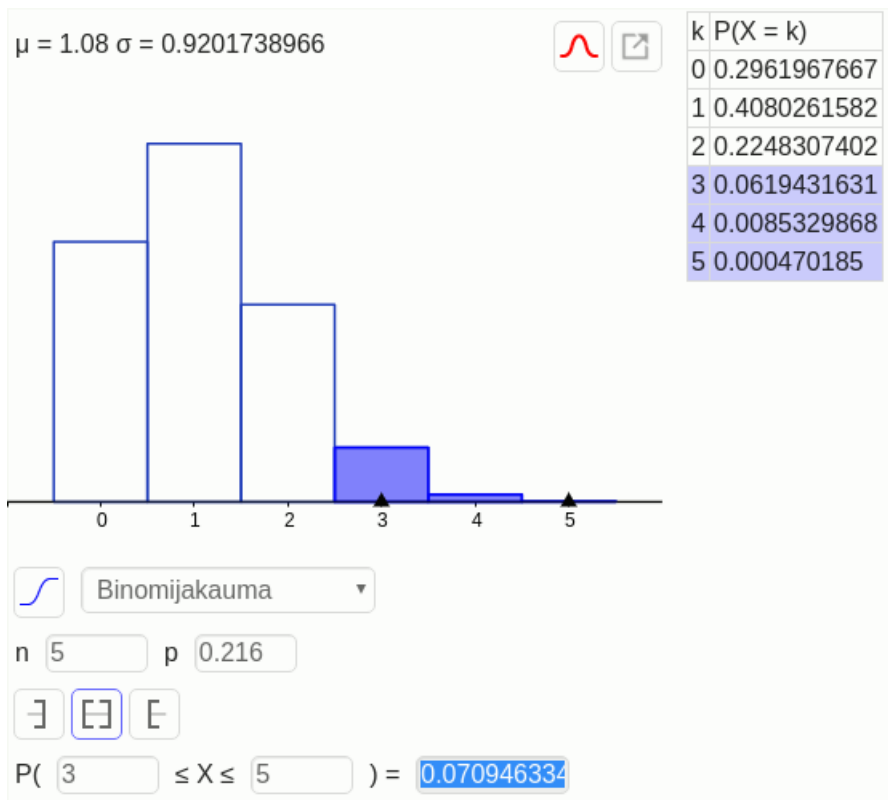
$$\mu = 24000 \quad \sigma = 8200$$



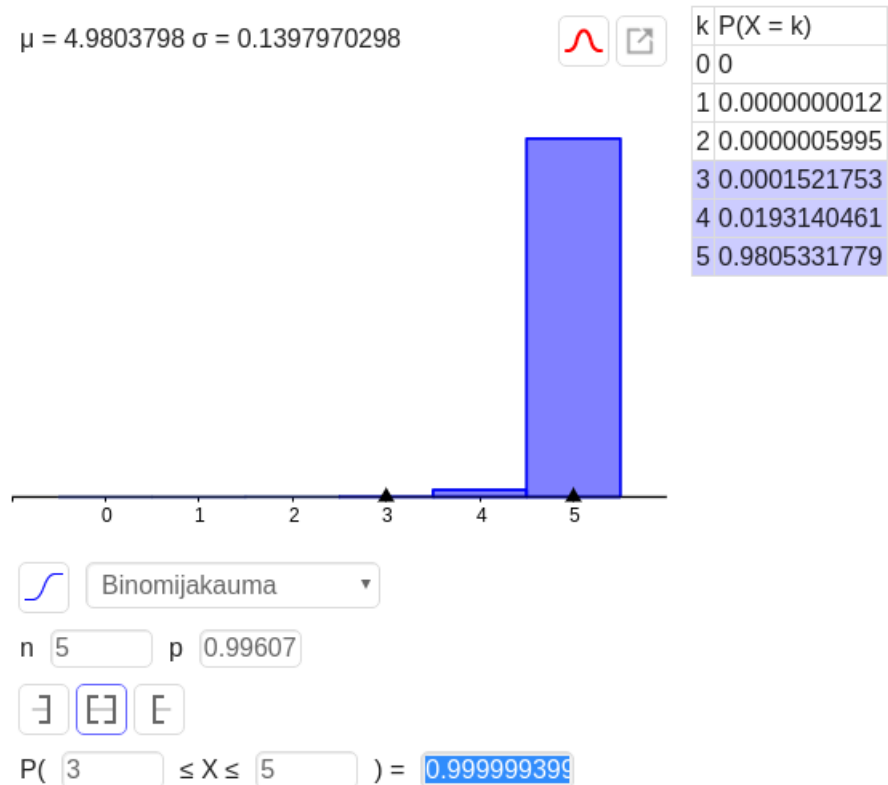
Kuten a-kohdassa, saadaan viiden lampun todennäköisyydeksi

$$P(5 \text{ kestää väh. } 2200 \text{ h}) = (0,99607596)^5 = 0,980533 \dots \approx 0,98 = 98\%$$

c) Todennäköisyys, että vähintään kolme hehkulamppua kestää 2200 h saadaan binomijakaumasta, jossa yksittäisen tapahtuman todennäköisyys on yhden lampun todennäköisyys 0,216. Vähintään kolme lamppua tarkoittaa, että 3, 4 tai 5 lamppua kestää tarpeeksi kauan. Geogebrian todennäköisyyslaskurilla saadaan todennäköisyydeksi 0.0709463349:



Vastaavasti saadaan vähintään kolmen energiansäästölamput todennäköisyydeksi 0.9999993993.



Näin ollen todennäköisyys, että molemmat tapahtuvat on:

$$P(\text{väh. 3 molempia kestää}) = 0,709463349 \cdot 0,9999993993 = 0,709462923 \approx 71\%.$$

TEHTÄVÄ B11

Tarkastele aineistoista löytyvää videota [trigonometria](#) ja vastaa sen perusteella kaikkiin kohtiin.

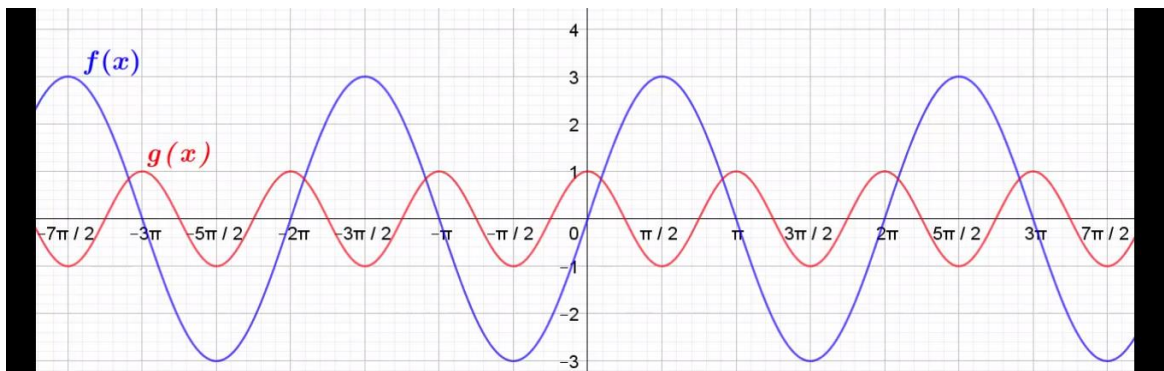
a) Videolla on funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat. Funktioiden lausekkeet ovat muotoa $A \cdot \sin(Bx)$ tai $C \cdot \cos(Dx)$, missä $A, B, C, D \in \mathbb{N}$. Määritä funktioiden lausekkeet. (2p)

b) Videolla piirretään kohtaan x funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajille tangentit, jotka muodostavat yhdessä y -akselin kanssa kolmion. Perustele, miksi kolmiota ei voida määrittää, kun $x = \frac{\pi}{2}$. (2p)

c) Määritä videolla esiintyneen kolmion suurin mahdollinen pinta-ala, kun $x \in \left[\frac{7\pi}{12}, \pi \right]$. (8p).

(12 p)

a) Oheisesta pysäytyskuvasta voidaan selvittää vaadittavat kertoimet.



Funktion f jakso näyttää olevan mitaltaan 2π , ja sen nollakohtia ovat mm. $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$, kuten funktiolla $\sin x$. Lisäksi funktion f arvojoukko näyttäisi olevan $[-3, 3]$, joten

$$f(x) = 3 \sin(x)$$

ja kertoimet $A = 3, B = 1$.

Funktion g on siis oltava muotoa $C \cdot \cos(Dx)$. Tällä funktiolla arvojoukko näyttäisi olevan $[-1, 1]$, ja sen jakson mitta π , puolet perusjakson mitasta, joten voidaan olettaa, että

$$g(x) = \cos(2x)$$

ja kertoimet $C = 1, D = 2$.

b) Molempien funktioiden eräs ääriarvokohta näyttää olevan $x = \frac{\pi}{2}$, joten tähän kohtaan piirretyt tangentit ovat x -akselin suuntaisia, ja näin ollen yhdensuuntaisia. Tämä tarkoittaa sitä, että tangentit eivät leikkaa, eivätkä näin ollen voivat olla osana kolmion muodostumista.

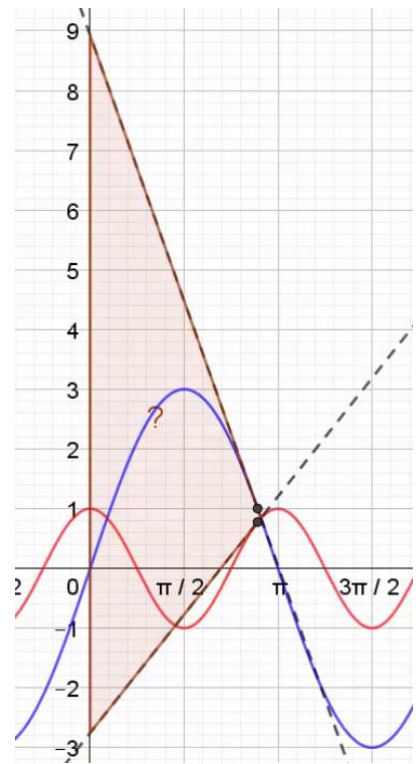
c) Ohessa jälleen kuvakaappaus videolta, mietitään kuvan avulla kolmion mittoja välillä $x \in \left] \frac{7}{12}\pi, \pi \right[$.

Syntyvän kolmion kannaksi voidaan valita tangenttisuorien ja y-akselin leikkauspisteiden välisen janan pituus. Tällöin korkeusjanaksi määräytyy tangenttien leikkauspisteen etäisyys y-akselista, eli leikkauspisteen x-koordinaatin arvo.

Määritetään ensiksi tangenttisuorien yhtälöt kohdassa $x = a$ välillä $x \in \left] \frac{7}{12}\pi, \pi \right[$.

Funktion $f(x) = 3 \sin(x)$ tangenttisuoran yhtälö saadaan laskimella

Funktion $g(x) = \cos(2x)$ tangenttisuoran yhtälö saadaan vastaavasti



Tehtävä 12

Huomautus: Jälkimmäisen menetelmän voi muotoilla myös kongruenssien avulla.

Induktio:

Väite: $n^3 + 5n$ on jaollinen luvulla 6.

Oletus: $n \in \mathbb{N}$

Alkuaskel: Kun $n = 0$, niin $n^3 + 5n = 0^3 + 5 \cdot 0 = 0$. 0 on jaollinen kaikilla luvuilla, joten väite pätee.

Induktio-oletus: Väite pätee, kun $n = k$, eli $n^3 + 5n = k^3 + 5k$ on jaollinen luvulla 6.

Tällöin $k^3 + 5k = 6q$, missä $q \in \mathbb{Z}$.

Induktio-askel: Osoitetaan induktio-oletuksen nojalla, että kun $n = k + 1$, niin luku $n^3 + 5n$ on jaollinen luvulla 6.

$$\begin{aligned}n^3 + 5n &= (k + 1)^3 + 5(k + 1) \\&= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 \\&= k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6\end{aligned}$$

Induktio-oletuksen mukaan luku $k^3 + 5k$ on jaollinen luvulla 6, joten riittää osoittaa, että luku $3k^2 + 3k + 6$ on myös jaollinen luvulla 6.

$$3k^2 + 3k + 6 = 3(k^2 + k + 2) = 3(k(k + 1) + 2)$$

Koska luvut k ja $k + 1$ ovat peräkkäisiä kokonaislukua, on toinen niistä parillinen, ja toinen pariton. Parillisen ja parittoman luvun tulo on aina parillinen, joten voidaan kirjoittaa $k(k + 1) = 2m$, missä $m \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$\begin{aligned}3k^2 + 3k + 6 &= 3(k(k + 1) + 2) \\&= 3(2m + 2) \\&= 3 \cdot 2(m + 1) \\&= 6(m + 1), \quad \text{kaikilla } m \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Näin ollen luku $3k^2 + 3k + 6$ on myös jaollinen luvulla 6 ja siten induktio-askel on todistettu. Induktion nojalla luku $n^3 + 5n$ on jaollinen luvulla 6. $\square$

Toinen tapa:

Kun lukua n jaetaan luvulla 6, mahdollisia jakojäännöksiä ovat luvut 0, 1, 2, 3, 4 ja 5. Näin ollen luku n voi saada muodot

$$\begin{aligned}n &= 6q \\n &= 6q + 1 \\n &= 6q + 2 \\n &= 6q + 3 \\n &= 6q + 4 \\n &= 6q + 5\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä lukuun $n^3 + 5n$, voidaan luku jakaa aina tekijöihin niin, että yksi tekijä on luku 6. Tehdään tämä laskimella:

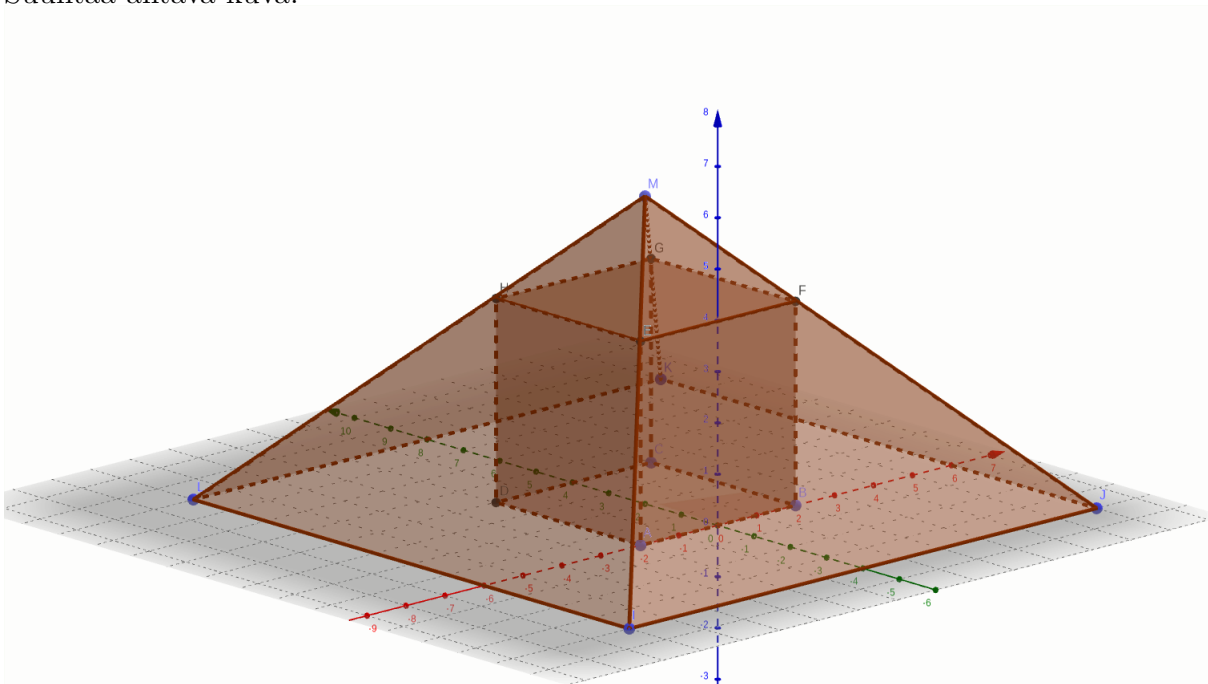
1	Jaa Tekijöihin $((6q)^3 + 5 \cdot 6q)$ $\rightarrow 6q (36q^2 + 5)$
2	Jaa Tekijöihin $((6q + 1)^3 + 5(6q + 1))$ $\rightarrow 6(6q + 1)(6q^2 + 2q + 1)$
3	Jaa Tekijöihin $((6q + 2)^3 + 5(6q + 2))$ $\rightarrow 6(3q + 1)(12q^2 + 8q + 3)$
4	Jaa Tekijöihin $((6q + 3)^3 + 5(6q + 3))$ $\rightarrow 6(2q + 1)(18q^2 + 18q + 7)$
5	Jaa Tekijöihin $((6q + 4)^3 + 5(6q + 4))$ $\rightarrow 6(3q + 2)(12q^2 + 16q + 7)$
6	Jaa Tekijöihin $((6q + 5)^3 + 5(6q + 5))$ $\rightarrow 6(6q + 5)(6q^2 + 10q + 5)$

Näin ollen luku $n^3 + 5n$ on jaollinen luvulla 6.

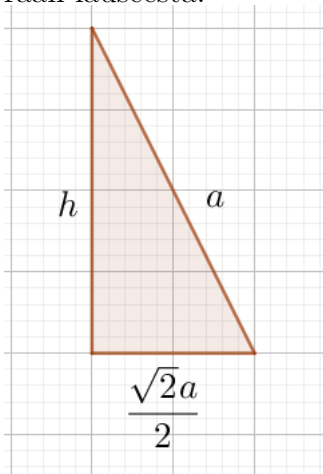
□

Tehtävä 13

Suuntaa antava kuva:

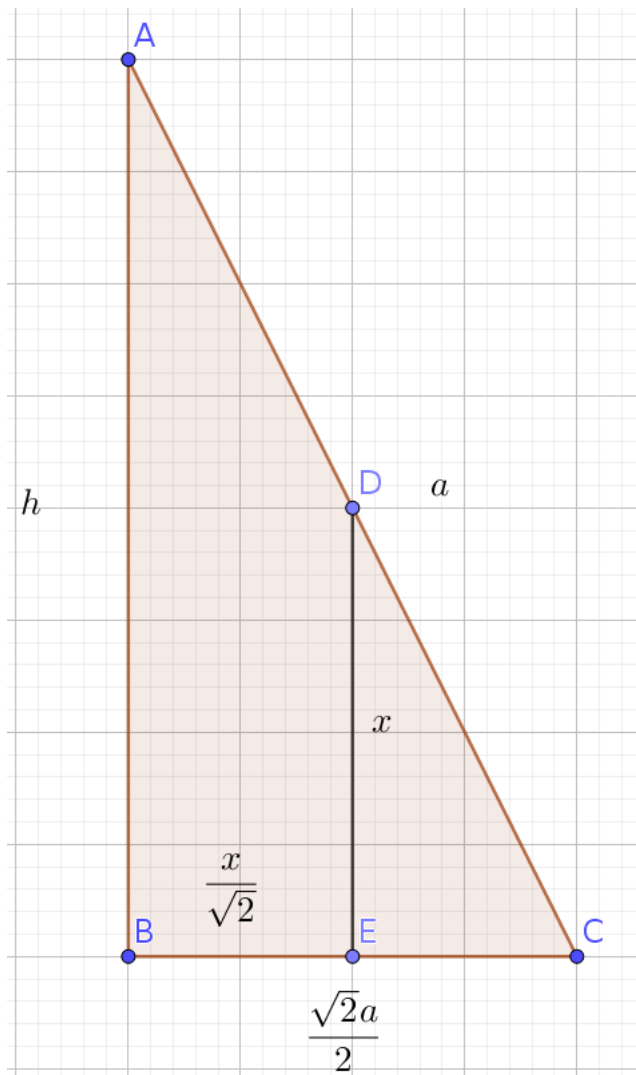


Pohjaneliön lävistäjän pituus on $\sqrt{2}a$, minkä avulla pyramidin korkeudeksi saadaan Pythagoraan lauseesta:



$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Merkitään kuution särmän pituutta x .



Kuvan kolmiot CBA ja CED ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuuden avulla voidaan muodostaa verrannot kolmioiden kateeteista. Koska $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{x}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}},$$

mistä ratkaisemalla symbolisella laskimella saadaan kuution särmäksi

$$x = a(\sqrt{2} - 1).$$