1. Kun polynomi $P(x)=x^3+2ax^2-3ax$ jaetaan binomilla $x-2$, saadaan jakojäännökseksi 4. Tutki onko polynomi $P(x)$ jaollinen binomilla $1-x^2$.

Ratkaisu: Polynomi voidaan esittää jakoyhtälön avulla muodossa $P(x)=(x-2)\cdot Q(x)+4$.

Tällöin on $P(2)=(2-2)\cdot Q(2)+4=0\cdot Q(2)+4=4$

Toisaalta on myös $P(2)=2^3+2a\cdot 2^2-3a\cdot 2=2a+8$, joten on oltava

$$2a+8=4 \quad\Rightarrow\quad 2a=-4 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{a=-2}}.$$

Polynomi $P(x)=x^3-4x^2+6x$ on jaollinen binomilla $1-x^2=(1-x)(1+x)$ mikäli binomin nollakohdat ovat myös polynomin $P(x)$ nollakohtia.

$P(1)=1^3-4\cdot 1^2+6\cdot 1=1-4+6=3\neq 0$ ja

$P(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)=-1-4-6=-11\neq 0$, joten polynomi $P(x)$ ei ole jaollinen binomilla $1-x^2$.

2. Määritä kaikki kokonaislukuparit (m,n), jotka toteuttavat yhtälön $(m+2n+1)(m-n+2)=5$.

Ratkaisu: Koska $5=1\cdot 5$ tai $5=5\cdot 1$ tai $5=-1\cdot(-5)$ tai $5=-5\cdot(-1)$, joudutaan ratkaisujen löytämiseksi ratkaisemaan neljä yhtälöparia:

$$(1)\ \begin{cases} m+2n+1=1 \\ m-n+2=5 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} m+2n+1=5 \\ m-n+2=1 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} m+2n+1=-1 \\ m-n+2=-5 \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} m+2n+1=-5 \\ m-n+2=-1 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari (1):

$$\begin{cases} m+2n+1=1 \\ m-n+2\ =5 & \|\cdot(-1) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} m+2n=0 \\ -m\ +n=-3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 3n=-3 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{n=-1}}$$

Koska $m+2n=0$, niin $m+2\cdot(-1)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{m=2}}$, eli eräs ratkaisu on pari $\underline{\underline{(2,-1)}}$.

Vastaavasti laskien saadaan yhtälöparien ratkaisuiksi:

$(2):\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$, $(3):\left(-\frac{16}{3},\frac{5}{3}\right)$ ja $(4):\underline{\underline{(-4,-1)}}$, joista vain viimeinen kelpaa.

3. Laske ympyrän sisään ja ympäri piirrettyjen säännöllisten 8-kulmioiden alojen suhde.

Ratkaisu: Säännölliset 8-kulmiot voidaan jakaa ympyrän keskipisteestä 8-kulmioiden kärkiin piirretyillä janoilla kahdeksaan, yhtenevään tasakylkiseen kolmioon.
Sisemmässä 8-kulmiossa kyljen pituus on sama kuin sitä ympäröivän ympyrän säde. Ympyrän ulkopuolisen 8-kulmion kohdalla ympyrän säde on puolestaan yksittäisen kolmion korkeusjana.

Määritetään isomman 8-kulmion sisäkolmion kyljen pituus.

Kolmion huippukulma on 45°, jonka korkeusjana puolittaa. Puolituksen tuloksena saadusta suorakulmaisesta kolmiosta voidaan määrittää kolmion kyljen pituus d:

$$\cos 22{,}5^\circ = \frac{r}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{r}{\cos 22{,}5^\circ}.$$

Tasakylkisten kolmioiden kyljet ovat vastinsivuja, ja niiden pituuksien suhteen neliö on yhtäsuuri kuin vastaavien tasakylkisten kolmioiden alojen suhde.
Samaa suhdetta noudattavat myös sisemmän ja ulomman 8-kulmion pinta-alat, joten

$$\frac{A_s}{A_u} = \left(\frac{r}{\left(\frac{r}{\cos 22{,}5^\circ}\right)}\right)^2 = \left(\cos 22.5^\circ\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)}}.$$ (Kosinin tarkka arvo MAOL:sta)

4. Määritä vakio a niin, että suora $3x+4y+a=0$ sivuaa ympyrää $x^2+y^2+4x+6y-12=0$.

Ratkaisu: Ympyrää sivuavaa suoraa kutsutaan ympyrän tangentiksi. Koska ympyrän keskipisteen etäisyys tangenttisuorasta on yhtä suuri kuin ympyrän säde, selvitetään ensiksi ympyrän keskipisteen koordinaatit ja ympyrän säde saattamalla ympyrän yhtälö keskipistemuotoon:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+4x+6y-12 = 0 \\ \Rightarrow\ & x^2+4x+y^2+6y = 12 \\ \Rightarrow\ & x^2+4x+4+y^2+6y+9 = 12+4+9 \\ \Rightarrow\ & (x+2)^2+(y+3)^2 = 25 \end{aligned}$$

Viimeisestä muodosta saadaan keskipisteeksi $K=(-2,-3)$ ja säteeksi $r=5$.

Keskipisteen $(-2,-3)$ etäisyys d suorasta $3x+4y+a=0$ on siis 5, joten pisteen etäisyyden laskukaavasta saadaan:

$$\frac{|3\cdot(-2)+4\cdot(-3)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{|-6-12+a|}{\sqrt{25}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{|a-18|}{5} = 5 \quad \Rightarrow \quad |a-18| = 25.$$

Ratkaistaan itseisarvoyhtälö:

$a-18=25$ tai $a-18=-25$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{a=43}}$ $\qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a=-7}}$

5. Osoita, että yhtälöllä $2x^4+6x=-3$ on ainakin kaksi reaalijuurta.

Ratkaisu: Esitetään yhtälö muodossa $2x^4+6x+3=0$, ja siirrytään tutkimaan funktion $f(x)=2x^4+6x+3$ reaalisten nollakohtien lukumäärää.

Funktio $f(x)$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva.

Koska

$$f(-2)=(-2)^4+6\cdot(-2)+3=16-12+3=7>0 \text{ ja}$$

$$f(-1)=(-1)^4+6\cdot(-1)+3=1-6+3=-2<0$$

on funktiolla $f(x)$ Bolzanon lauseen mukaan välillä $]-2,-1[$ ainakin yksi nollakohta.

Vastaavasti, koska

$$f(-1)=(-1)^4+6\cdot(-1)+3=1-6+3=-2<0 \text{ ja}$$

$$f(0)=0^4+6\cdot 0+3=0+0+3=3>0$$

on funktiolla $f(x)$ myös välillä $]-1,0[$ ainakin yksi nollakohta.

Koska kyseiset lukuvälit ovat erilliset, voidaan todeta funktiolla olevan ainakin kaksi reaalista nollakohtaa, ja näin ollen yhtälöllä $2x^4+6x=-3$ ainakin kaksi reaalista juurta. $\therefore$

6. Paraabeli $y=\frac{3\pi}{16}(1-x^2)$ jakaa ympyrän $x^2+y^2=1$ rajoittaman alueen kahteen osaan. Määritä suuremman osan suhde pienempään.

Ratkaisu: Paraabeli $y=\frac{3\pi}{16}(1-x^2)$ on alaspäin aukeava. Sen huippu on y -akselilla, joten se on symmetrinen y -akselin suhteen.

Ympyrä $x^2+y^2=1$ on origokeskinen yksikköympyrä. Ympyrän yhtälön perusteella voidaan muuttujat rajata seuraavasti: $-1\le x\le 1$ ja $-1\le y\le 1$.

Määritetään paraabelin ja ympyrän leikkauspisteet. Ympyrän yhtälöstä saadaan $y^2=1-x^2$, ja sijoittamalla tulos edelleen paraabelin yhtälöön, voidaan leikkauspisteiden y -koordinaatit ratkaista yhtälöstä:

$$y=\frac{3\pi}{16}\left(1-x^2\right) \;\Rightarrow\; y=\frac{3\pi}{16}\cdot y^2 \;\Rightarrow\; y-\frac{3\pi}{16}\cdot y^2=0 \;\Rightarrow\; y\cdot\left(1-\frac{3\pi}{16}\cdot y\right)=0$$

$$\Rightarrow\; y=0 \;\wedge\; \left(y=\frac{16}{3\pi}>1\right).$$

Leikkauspisteet ovat x -akselin pisteitä: $x^2+y^2=1 \;\Rightarrow\; x^2=1 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$.

Paraabeli jakaa ympyrän kahteen osaan, joista suurempi sisältää x -akselin alapuolisen puoliympyrän sekä paraabelin ja x -akselin väliin jäävän alueen. Pienempi yläosa on puolestaan puoliympyrä, josta on vähennetty paraabelin ja x -akselin väliin jäävä osa.

Yksikköympyrän pinta-ala on $\pi\cdot 1^2=\pi$, joten puoliympyrän ala on $\frac{\pi}{2}$.

Paraabelin ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan määrätyn integraalin arvona

$$\int_{-1}^{1}\frac{3\pi}{16}\left(1-x^2\right)dx=\Big/_{-1}^{1}\frac{3\pi}{16}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)=\frac{3\pi}{16}\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{3\pi}{16}\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Isomman osan pinta-ala on $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, ja pienemmän $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

Pinta-alojen suhde on $\frac{3\pi}{4}:\frac{\pi}{4}=\underline{\underline{3:1}}$.

7. Osoita derivaattaa käyttämättä, että funktio $f(x)=x+\frac{1}{x}$ on aidosti kasvava välillä $[1,\infty[$.

Ratkaisu: Olkoon $b>a\geq 1$. Funktio $f(x)$ on määrittelyjoukossaan aidosti kasvava mikäli voidaan osoittaa, että $f(b)>f(a)$.

$$f(b)-f(a)=b+\frac{1}{b}-\left(a+\frac{1}{a}\right)=b+\frac{1}{b}-a-\frac{1}{a}$$ Lavennetaan samannimisiksi

$$=\frac{ab^2}{ab}+\frac{a}{ab}-\frac{a^2b}{ab}-\frac{b}{ab}=\frac{ab^2-a^2b+a-b}{ab}$$
$$=\frac{ab(b-a)-1\cdot(b-a)}{ab}=\frac{(b-a)(ab-1)}{ab}$$

Koska määrittelyehdon mukaan on $b>a\geq 1$, niin $b-a>0$ sekä $ab>1$.
Näin ollen

$$f(b)-f(a) = \frac{(b-a)(ab-1)}{ab} > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(b) > f(a)}} \qquad \therefore$$

8. Tikkaiden alapää on 3,0 metrin etäisyydellä seinästä ja yläpää on seinällä 9,7 metrin korkeudella. Kuinka paljon tikkaiden yläpää laskeutuu, jos alapäätä vedetään 2,0 metriä poispäin seinästä?

Ratkaisu: Tikkaat, maanpinta ja seinä muodostavat mallikuvassa suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat $a = 3{,}0$ m ja $b = 9{,}7$ m. Lasketaan tikkaiden pituus c Pythagoraan lauseella: $c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = (3{,}0)^2 + (9{,}7)^2 = 103{,}09 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{103{,}09} \approx 10{,}15$ m.

Tikkaat siirretään kaksi metriä poispäin seinästä, määritetään uusi korkeus samoin Pythagoraan lauseella:

$(5{,}0)^2 + h^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 103{,}09 - 25 = 78{,}09 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{78{,}09} \approx 8{,}8$ m.

Tikkaiden yläpää laskeutuu siis $b - h = 9{,}7 - 8{,}8 = 0{,}9$ m.

9. Mikä pisteiden $(-1, 3)$ ja $(2, -2)$ kautta kulkevan suoran pisteistä on lähinnä origoa?

Ratkaisu: Pisteiden $(-1, 3)$ ja $(2, -2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \frac{-2-3}{2-(-1)} = -\frac{5}{3}$.

Suoran yhtälöksi saadaan

$y - 3 = -\frac{5}{3}(x-(-1)) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = -\frac{5}{3}x - \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad 3y - 9 = -5x - 5 \quad \Rightarrow \quad 5x + 3y - 4 = 0$.

Origoa lähin piste tällä suoralla on tämän suoran ja origon kautta kulkevan normaalin leikkauspiste. Origon kautta kulkevien suorien yhtälöt ovat muotoa $y = kx$, ja koska normaalin kulmakerroin on laskettavissa suoran kulmakertoimesta $k_n = -\frac{1}{k} = \frac{3}{5}$, on kyseisen normaalin yhtälö $y = \frac{3}{5}x$.

Sijoitetaan $y = \frac{3}{5}x$ suoran yhtälöön, ja ratkaistaan leikkauspisteen x-koordinaatti:

$5x + 3 \cdot \frac{3}{5}x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + \frac{9}{5}x + 4 = 0 \quad \Rightarrow 25x + 9x + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 34x = -20$

$\Rightarrow \quad x = -\frac{20}{34} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{10}{17}}}$

Koska $y = \frac{3}{5}x$, niin leikkauspisteen y-koordinaatti on $y = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{10}{17}\right) = -\frac{6}{17}$.

Lähin piste on piste $\left(-\frac{10}{17}, -\frac{6}{17}\right)$.

10. Ratkaise yhtälö $e^{2-x} - 2e^x = e$.

Ratkaisu: $e^{2-x} - 2e^x = e \quad \Rightarrow \quad \frac{e^2}{e^x} - 2e^x = e$.

Merkitään $e^x = t\ (>0)$, jolloin yhtälö voidaan esittää muodossa $\frac{e^2}{t} - 2t = e$. Ratkaistaan tästä yhtälöstä muuttuja t:

$$\frac{e^2}{t} - {}^{t)}2t = e \quad \Rightarrow \quad \frac{e^2}{t} - \frac{2t^2}{t} = e \quad \Rightarrow \quad \frac{e^2 - 2t^2}{t} = e \quad \Rightarrow \quad -2t^2 + e^2 = et.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen:

$$-2t^2 - et + e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{e \pm \sqrt{(-e)^2 - 4\cdot(-2)\cdot e^2}}{2\cdot(-2)} = \frac{e \pm \sqrt{9e^2}}{-4} = \frac{e \pm 3e}{-4}$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-2e}{-4} = \frac{e}{2} \\ t_2 = \frac{4e}{-4} = -e \end{cases}$$

Jälkimmäinen juuri ei kelpaa negatiivisena, edellisestä saadaan yhtälö, koska $e^x = t$:

$$e^x = \frac{e}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln e^x = \ln\left(\frac{e}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \ln e - \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 1 - \ln 2}}.$$

11. Ratkaise yhtälö $\sqrt{1+3x} + 2x = 0$.

Ratkaisu: Määrittelyjoukko: $1 + 3x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \geq -\tfrac{1}{3}}}$.

$$\sqrt{1+3x} + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+3x} = -2x$$

Korotetaan puolittain neliöön, otettava huomioon reaalisuusehto $-2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \leq 0}}$.

Ehdot yhdistämällä saadaan muuttujalle määrittelyehdoksi $-\tfrac{1}{3} \leq x \leq 0$.

$$1 + 3x = (-2x)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3x = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad -4x^2 + 3x + 1 = 0$$

Ratkaisukaavaa käyttäen

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-4)\cdot 1}}{2\cdot(-4)} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-8} = \frac{-3 \pm 5}{-8} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-8}{-8} = 1 \\ x_2 = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ratkaisuksi kelpaa ainoastaan juuri $\underline{\underline{x = -\tfrac{1}{4}}}$.

12. Suorakulmaisen kolmion kaksi sivua ovat a ja $3a$. Määritä kolmas sivu.

Ratkaisu: Koska sivun pituus $a > 0$, niin selvästi $3a > a$. Sivu $3a$ voi olla joko kateetti tai hypotenuusa, joten kolmannen sivun b pituudeksi on kaksi eri vaihtoehtoa:

1° Sivu b on hypotenuusa, joten $b^2 = a^2 + (3a)^2 = 10a^2 \Rightarrow \underline{\underline{b = \sqrt{10}\,a}}$.

2° Sivu b on toinen kateetti, joten $a^2 + b^2 = (3a)^2 \Rightarrow b^2 = 8a^2 \Rightarrow \underline{\underline{b = \sqrt{8}\,a}}$.

13. Laske käyrien $y = x|x| + 3$ ja $y = x^2 + x$ rajaaman alueen ala.

Ratkaisu: Merkitään selvyyden vuoksi $f(x) = x|x| + 3$ ja $g(x) = x^2 + x$.

Kun $x < 0$, voidaan funktio f esittää muodossa $f(x) = -x^2 + 3$. Määritetään käyrien leikkauskohdat tällä määrittelyvälillä:

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 + x = -x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0.$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$\underline{\underline{x_1 = -\frac{3}{2}}} < 0 \qquad \left(x_2 = \frac{4}{4} = 1 > 0\right)$$

Välillä $\left]-\frac{3}{2}, 0\right[$ $f(x) > g(x)$, sillä esimerkiksi $f(-1) = 2$ ja $g(-1) = 0$.

Vastaavasti, kun $x \geq 0$, on $f(x) = x^2 + 3$, ja käyrien leikkauskohta saadaan yhtälöstä

$$x^2 + x = x^2 + 3 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

Välillä $]0, 3[$ $f(x) > g(x)$, sillä esimerkiksi $f(1) = 4$ ja $g(1) = 2$.

Käyrien rajaama alue lasketaan määrättyjen integraalien arvona:

$$A=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{0}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(-x^2+3-\left(x^2+x\right)\right)dx+\int_{0}^{3}\left(x^2+3-\left(x^2+x\right)\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(-2x^2-x+3\right)dx+\int_{0}^{3}\left(-x+3\right)dx$$

$$=\Big/_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right)+\Big/_{0}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)$$

$$=0-\left(-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)+\left(-\frac{1}{2}\cdot 3^2+3\cdot 3-0\right)=\underline{\underline{\frac{63}{8}}}$$

14. Millä x:n arvoilla sarja $\sum_{n=0}^{\infty}(1-2\cos x)^n$ suppenee, ja mikä on tällöin sen summa?

Ratkaisu: Sarja on geometrinen sarja, jonka suhdeluku on $q=1-2\cos x$. Sarja suppenee niillä muuttujan x arvoilla, joilla $-1<q<1$.

$$\begin{aligned}
-1 &< 1-2\cos x < 1 && \Vert -1\\
-2 &< -2\cos x < 0 && \Vert :(-2)\\
1 &> \cos x > 0 &&
\end{aligned}$$

Epäyhtälö on tosi esimerkiksi välillä $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, joten sarja suppenee kaikilla osaväleillä

$\left]-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi\,,\,\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right[$, missä n on kokonaisluku.

Sarjan ensimmäinen termi on $a_0=(1-2\cos x)^0=1$, ja sarjan summa on

$$S=\frac{a_0}{1-q}=\frac{1}{1-(1-2\cos x)}=\underline{\underline{\frac{1}{2\cos x}}}.$$

15. Määritä käyrän $y=e^{2x-2}+x^3-1$ kohtaan $x=1$ piirretyn normaalin yhtälö.

Ratkaisu: Kun $x=1$, on $y=e^{2\cdot 1-2}+1^3-1=e^0+1-1=1$. Normaali kulkee pisteen $(1,1)$ kautta. $y'=2\cdot e^{2x-2}+3x^2$, joten derivaatan arvo kohdassa $x=1$ on $y'(1)=2\cdot e^{2\cdot 1-2}+3\cdot 1^2=2\cdot e^0+3=5$. Tämä on myös kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Koska tangentti ja normaali ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa voidaan normaalin kulmakerroin k_n määrittää yhtälöstä $k_t\cdot k_n=-1 \quad\Rightarrow\quad k_n=-\frac{1}{5}$.

Johdetaan normaalin yhtälö: $y-1=-\frac{1}{5}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y-1=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}}}$.

16. Juustopakkauksen tuoteselostuksen mukaan juustossa on rasvaa 28% painosta ja 45% kuiva-aineesta. Kuinka monta prosenttia juuston painosta on vettä ja muita haihtuvia aineita?

Ratkaisu: Olkoon juuston kokonaismassa a, ja kuiva-aineen massa juustossa b. Tällöin rasvan massa m voidaan ilmaista kahdella tavalla: $m=0{,}28a$ tai $m=0{,}45b$.

Ratkaistaan b yhtälöstä $0{,}45b=0{,}28a \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{0{,}28a}{0{,}45} \quad \Rightarrow \quad b\approx 0{,}6222...a$.

Juustossa on näin ollen kuiva-aineita n. 62% massasta, joten veden ja haihtuvien aineiden osuudeksi massasta jää $\underline{\underline{38\%}}$.

17. Määritä sellainen luku x, että lukujen $\pi+1$, $\pi+x$ ja πx keskiarvo on 2π.

Ratkaisu: Keskiarvo $\bar{x}=\dfrac{(\pi+1)+(\pi+x)+\pi x}{3}=2\pi \quad \Rightarrow \quad \pi+1+\pi+x+\pi x=6\pi$

$$\pi x+x=6\pi-2\pi-1 \quad \Rightarrow \quad (\pi+1)x=4\pi-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=\frac{4\pi-1}{\pi+1}}}.$$

18. Ratkaise yhtälö $|2x-1|=|3x+2|$.

Ratkaisu: Ilman itseisarvomerkkejä lausuttuna yhtälö jakautuu kahteen osaan:

$1^\circ \quad 2x-1=3x+2 \quad \Rightarrow \quad 2x-3x=2+1 \quad \Rightarrow \quad -x=3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=-3}}$ tai

$2^\circ \quad 2x-1=-(3x+2) \quad \Rightarrow \quad 2x-1=-3x-2 \quad \Rightarrow \quad 2x+3x=-2+1 \quad \Rightarrow \quad 5x=-1$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x=-\dfrac{1}{5}}}$

19. Mikä on funktion $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\lg(2-x)+\sqrt{5x+3-2x^2}$ määrittelyjoukko.

Ratkaisu: Funktion määrittelyjoukko on sen termien määrittelyjoukkojen leikkausjoukko, eli ne muuttujan x arvot, jotka kuuluvat jokaisen termin määrittelyjoukkoon:

$1^\circ \quad \dfrac{x}{x-1}$ on määritelty, kun $x-1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 1$.

2° $\lg(2-x)$ on määritelty, kun $2-x>0 \quad \Rightarrow \quad x<2$.

3° $\sqrt{5x+3-2x^2}$ on määritelty, kun juurrettava polynomi $-2x^2+5x+3 \geq 0$.

Ratkaistaan toisen asteen polynomiepäyhtälö, polynomin nollakohtien ja kuvaajan avulla:

Nollakohdat: $-2x^2+5x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{-4}=\dfrac{-5\pm 7}{-4}$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2} \text{ tai } x=3.$$

Polynomin kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka saa ei-negatiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

Termin määrittelyjoukko on siis $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 3$.

Ehdot yhdistäen funktion määrittelyjoukoksi saadaan $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$ ja $x \neq 1$.

20. Neljästä desilitrasta savea muotoillaan kaksi palloa siten, että pienemmän tilavuus on puolet suuremman tilavuudesta. Mitkä ovat pallojen säteet?

Ratkaisu: Olkoon pienemmän pallon tilavuus V_1 ja suuremman pallon tilavuus V_2. Suuremman pallon tilavuus on kaksinkertainen pienemmän pallon tilavuuteen nähden , joten voidaan merkitä $V_2 = 2V_1$. Tilavuuksien summa on sama kuin saven tilavuus, joten $V_1 + V_2 = 4dl = 400\ cm^3$.

Määritetään ensin pallojen tilavuuden, ja sen jälkeen niiden säteet:

$$V_1 + V_2 = 400\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad V_1 + 2\cdot V_1 = 400\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot V_1 = 400\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{400}{3}\ cm^3.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_1^3 = \frac{400}{3}\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad \pi\cdot r_1^3 = 100\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\ cm \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_1 \approx 3{,}17\ cm}}$$

Koska $V_2 = 2\cdot V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \dfrac{800}{3}\ cm^3$.

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_2^3 = \frac{800}{3}\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad \pi\cdot r_2^3 = 200\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}\ cm \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_2 \approx 3{,}99\ cm}}$$

21. Jos kauppias alentaa tuotteen hintaa $p\ \%$, tuotetta myydään $1{,}6p\ \%$ enemmän. Mikä p:n arvo antaa kauppiaalle suurimman myynnin arvon? Millä p:n arvolla myynnin arvo on sama kuin alkuperäisellä hinnalla?

Ratkaisu: Olkoon tuotteen kappalehinta ennen alennusta a, ja tätä hintaa vastaava myynnin määrä b kpl. Myynnin arvo m on näin ollen laskettavissa tulona $m = a \cdot b$.

Hinnan muutoksen jälkeen tuotteen alennetuksi kappalehinnaksi tulee $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot a$.

Myynnin määrä puolestaan nousee, ja uusi määrä on $\left(1 + \frac{1{,}6\,p}{100}\right) \cdot b$. Kertomalla uusi kappalehinta uudella myyntimäärällä saadaan myynnin arvoksi

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot a\cdot\left(1+\frac{1{,}6p}{100}\right)\cdot b=\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}6p}{100}\right)\cdot a\cdot b=\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}6p}{100}\right)\cdot m\,.$$

Myynnin arvo saa suurimman arvonsa kun kerroin $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}6p}{100}\right)$ on suurimmillaan.

Merkitään kerrointa funktiona $f(p)$, ja määritetään sen suurin arvo, kun $0 < p < 100$.

$$f(p)=\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}6p}{100}\right)=-\frac{1{,}6}{10000}p^2+\frac{0{,}6}{100}p+1$$

$$f'(p)=-\frac{3{,}2}{10000}p+\frac{0{,}6}{100}=0\text{, kun } -3{,}2p+60=0 \quad\Rightarrow\ p=\frac{-60}{-3{,}2}=\underline{\underline{18{,}75}}\,.$$

Koska funktio $f(p)$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaajana on alaspäin aukeava paraabeli, saa se suurimman arvonsa huipussaan, joka on derivaatan nollakohta. Paras myynnin arvo saadaan siis $18{,}75\ \%$ hinnan alennuksella.

Myynnin arvo on alennuksen jälkeen samalla tasolla, niillä p:n arvoilla, joilla $f(p)=1$:

$$f(p)=1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1{,}6}{10000}p^2+\frac{0{,}6}{100}p+1=1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1{,}6}{10000}p^2+\frac{0{,}6}{100}p=0$$

$$\Rightarrow\quad -1{,}6p^2+60p=0 \quad\Rightarrow\quad p(-1{,}6p+60)=0 \quad\Rightarrow\quad p=0 \wedge -1{,}6p+60=0$$

Vain jälkimmäinen yhtälö antaa ”järkevän” vastauksen, $p=\frac{-60}{-1{,}6}=\underline{\underline{37{,}5}}$.

22. Vektoreista $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tiedetään, että $\bar{a}+2\bar{b}=\bar{i}$ ja $4\bar{a}+5\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}$. Kuinka suuri on vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma?

Ratkaisu: Ratkaistaan vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ yhtälöparista

$$\begin{cases} \bar{a}+2\bar{b}=\bar{i} & \| \cdot(-4) \\ 4\bar{a}+5\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j} & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\bar{a}-8\bar{b}=-4\bar{i} \\ 4\bar{a}+5\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j} \end{cases}$$

Laskettaessa allekkain yhteen saadaan $-3\bar{b}=-2\bar{i}+\bar{j} \quad \Rightarrow \quad \bar{b}=\frac{2}{3}\bar{i}-\frac{1}{3}\bar{j}$.

Vastaavasti laskien ratkaistaan myös vektori $\bar{a}$:

$$\begin{cases} \bar{a}+2\bar{b}=\bar{i} & \| \cdot(-5) \\ 4\bar{a}+5\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j} & \| \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\bar{a}-10\bar{b}=-5\bar{i} \\ 8\bar{a}+10\bar{b}=4\bar{i}+2\bar{j} \end{cases}$$

$$3\bar{a}=-\bar{i}+2\bar{j} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}=-\frac{1}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j} .$$

Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma ratkaistaan yhtälöstä:

$$\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}=\frac{-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{-\frac{4}{9}}{\sqrt{\frac{5}{9}}\cdot\sqrt{\frac{5}{9}}}=-\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=-\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \angle\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\approx \underline{\underline{143^\circ}} .$$

23. Osoita, että $\frac{a}{b}+\frac{1}{a}>\frac{1}{b}+1$, kun a ja b ovat reaalilukuja ja $a>b>1$.

Ratkaisu: $\frac{a}{b}+\frac{1}{a}>\frac{1}{b}+1 \quad \Rightarrow \quad {}^{a)}\frac{a}{b}+{}^{b)}\frac{1}{a}-{}^{a)}\frac{1}{b}-{}^{ab)}\frac{1}{1}>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+b-a-ab}{ab}>0$

$$\Rightarrow \quad \frac{a(a-1)-b(a-1)}{ab}>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(a-b)(a-1)}{ab}>0$$

Epäyhtälö on identtisesti tosi, sillä ehdon $a>b>1$ mukaan $a-b>0$, $a-1>0$ ja $ab>0$.

24. Kahdella kolmiolla on sama pinta-ala. Toisen kolmion sivut ovat 5 cm, 5 cm ja 4 cm. Toisessakin kolmiossa on kaksi 5 cm mittaista sivua. Miten pitkä on tämän kolmion kolmas sivu, kun kolmiot eivät ole yhteneviä?

Ratkaisu: Molemmat kolmiot ovat tasakylkisiä kolmioita. Ensin mainitun kolmion huippukulman on oltava terävä kulma, sillä huippua vastaava kanta on kolmion lyhyin sivu.

Tasakylkisen kolmion pinta-ala voidaan määrittää seuraavasti:

$A = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\beta$, missä a on kyljen pituus, ja β on niiden välinen (huippu)kulma.

Koska terävän kulman ja sen (tylpän) suplementtikulman sinin arvot ovat yhtä suuret, on kysytty kolmio tällainen tylppäkulmainen, tasakylkinen kolmio.

Määritetään ensin mainitun kolmion huippukulma β esimerkiksi kosinilauseella:

$$5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos\beta = 4^2 \quad \Rightarrow \quad 50 - 50\cos\beta = 16 \quad \Rightarrow \quad -50\cos\beta = -34$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{-34}{-50} = \frac{17}{25}.$$

Kulman β ja sen suplementtikulman $180^\circ - \beta$ kosinit ovat puolestaan vastalukuja, joten

$$\cos(180^\circ - \beta) = -\frac{17}{25}.$$

Ratkaistaan tämän tylppäkulmaisen kolmion kanta x jälleen kosinilausetta käyttäen:

$$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos(180^\circ - \beta) = 50 - 50\cdot\left(-\frac{17}{25}\right) = 84$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \sqrt{84}}}\ .$$

25. Määritä vakio a siten, että $\int_0^1 (e^x + ax)\,dx = 0$.

Ratkaisu: $$\int_0^1 (e^x + ax)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \Big/_0^1 \left(e^x + \frac{a}{2}x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(e^1 + \frac{a}{2}\cdot 1^2\right) - \left(e^0 + \frac{a}{2}\cdot 0^2\right) = 0$$

$$e + \frac{a}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} = 1 - e \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 2 - 2e}}\ .$$

26. Kuinka monta termiä aritmeettisen summan $1 + 3 + 5 + \ldots$ alusta on laskettava yhteen, jotta summan arvo olisi vähintään miljoona?

Ratkaisu: Aritmeettisen jonon $1, 3, 5, \ldots$ yleinen termi on $a_n = 2n-1$, missä $n = 1, 2, 3, \ldots$

Osasumma $S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \dfrac{1+2n-1}{2} = n^2$.

Summan arvo on vähintään miljoona niillä n:n arvoilla, jotka toteuttavat epäyhtälön

$$n^2 \geq 1\,000\,000 \ .$$

Koska $n > 0$, niin epäyhtälö voidaan ratkaista ottamalla neliöjuuri puolittain, jolloin saadaan

$$n \geq 1\,000 .$$

Termejä on siis oltava summassa vähintään $\underline{\underline{1\,000}}$.

$(*)$ a) Määrää kolmion ABC kulmien puolittajasuorien yhtälöt, kun $A = (0,0)$, $B = (2,4)$ ja $C = \left(5\frac{1}{3}, -2\frac{2}{3}\right)$.

b) Todista, että kaikki kolmion ABC puolittajasuorat kulkevat saman pisteen Q kautta.

c) Todista, että piste Q keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa kolmion ABC jokaista sivua. Määrää tämän ympyrän säde ja yhtälö.

$(*)$ Olkoon funktio $f(x) = 1 - \ln\sqrt{x-1}$.

a) Millä x:n arvoilla funktio $f(x)$ saa positiivisia arvoja?

b) Määritä sen kolmion pinta-ala, jonka muodostavat kohtaan $x = 2$ piirretty tangentti ja normaali y-akselin kanssa.

c) Määritä funktion $f(x)$ käänteisfunktion lauseke ja määrittelyjoukko.

d) Käyrä $y = f(x)$ pyörähtää y-akselin ympäri välillä $0 \leq y \leq 1$. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu: a) Funktio on määritelty niillä muuttujan x arvoilla, joilla $\sqrt{x-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$.

$$f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \ln\sqrt{x-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \ln(x-1)^{\frac{1}{2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}\ln(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad 2 - \ln(x-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x-1) < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 1 < e^2 \quad \Rightarrow \quad x < e^2 + 1$$

Kun otetaan huomioon vielä määrittelyehto, niin $f(x) > 0$, kun $\underline{\underline{1 < x < e^2 + 1}}$.

b) Kohdassa $x = 2$ on käyrän y-koordinaattina $y = f(2) = 1 - \ln\sqrt{2-1} = 1$, joten tangentti ja normaali kulkevat pisteen $(2,1)$ kautta.

Määritetään kohtaan $x=2$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin:

$$f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{D(x-1)}{x-1}=-\frac{1}{2(x-1)} \ .$$

$$k_t = f'(2)=-\frac{1}{2(2-1)}=-\frac{1}{2}.$$

Normaalin kulmakerroin on $k_n=2$, sillä on oltava $k_t\cdot k_n=-1$ (suorien kohtisuoruusehdon mukaisesti).

Suorien yhtälöt johdetaan lähtien muodosta $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$, missä $(x_0,y_0)=(2,1)$

Tangentti: $y-1=-\frac{1}{2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y=-\frac{1}{2}x+2}}$. Leikkaa y -akselin pisteessä $(0,2)$

Normaali: $y-1=2(x-2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y=2x-3}}$. Leikkaa y -akselin pisteessä $(0,-3)$.

Kolmion kärkinä ovat pisteet $(2,1)$, $(0,2)$ ja $(0,-3)$. Kun valitaan kolmion kannaksi y -akselilla sijaitseva sivu, niin kannan pituus on $a=2-(-3)=5$. Kolmion korkeudeksi saadaan $h=2$ (pisteen $(2,1)$ etäisyys y -akselista), ja kolmion ala on $\underline{\underline{A=\frac{5\cdot 2}{2}=5}}$.

c) Käänteisfunktion yhtälö saadaan ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $y=1-\ln\sqrt{x-1}$:

$$y=1-\ln\sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad \ln\sqrt{x-1}=1-y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(x-1)=1-y$$

$$\Rightarrow \quad \ln(x-1)=2(1-y) \quad \Rightarrow \quad x-1=e^{2(1-y)} \quad \Rightarrow \quad x=1+e^{2(1-y)}$$

Kun vielä suoritetaan muuttujien vaihto, saadaan käänteisfunktioksi $\underline{\underline{f^{-1}(x)=1+e^{2(1-x)}}}$. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko.

d) Koska käyrä $y=f(x)$ pyörähtää y -akselin ympäri, lasketaan kappaleen tilavuus käänteisfunktion $x=g(y)$ avulla määrättynä integraalina välillä $0\le y\le 1$:

$$V=\int_0^1 \pi\cdot g^2 dy=\pi\cdot\int_0^1\left(1+e^{2(1-y)}\right)^2 dy=\pi\cdot\int_0^1\left(1+2e^{2-2y}+e^{4-4y}\right)dy$$

$$V=\pi\cdot\Big/_0^1\left(y-e^{2-2y}-\frac{1}{4}e^{4-4y}\right)=\pi\cdot\left[\left(1-e^0-\frac{1}{4}e^0\right)-\left(0-e^2-\frac{1}{4}e^4\right)\right]$$

$$V=\pi\cdot\left[-\frac{1}{4}+e^2+\frac{1}{4}e^4\right]=\underline{\underline{\frac{\pi\left(e^4+4e^2-1\right)}{4}}}\approx 65{,}3$$

$(*)$ a) Määritä funktio $g(t)$ siten, että $\int_1^{a+1} g(t)dt=a^2+a$.

b) Funktio $f(x)$ on jatkuva väleillä $-1<x<0$ ja $x>0$ sekä lisäksi funktio toteuttaa ehdot

1° $f(0)=0$ ja 2° $\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le 1$. Määritä $f'(0)$.

Ratkaisu: a) Funktio $g(t)$ voidaan olettaa ensimmäisen asteen polynomifunktioksi, sillä sen integraalifunktio on toisen asteen polynomifunktio, ja ylärajana määrätyssä integraalissa on ensimmäisen asteen polynomifunktio. Merkitään $g(t)=kt+b$, ja lasketaan määrätty integraali:

$$\int_1^{a+1} g(t)dt=\int_1^{a+1}(kt+b)dt=\Big/_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}kt^2+bt\right)=\left[\frac{1}{2}k(a+1)^2+b(a+1)\right]-\left[\frac{1}{2}k\cdot 1^2+b\cdot 1\right]$$

$$=\frac{1}{2}k\left(a^2+2a+1\right)+ba+b-\frac{1}{2}k-b=\frac{1}{2}ka^2+ka+\frac{1}{2}k+ba+b-\frac{1}{2}k-b=\frac{1}{2}ka^2+(k+b)a$$

Koska $\int_1^{a+1} g(t)dt=a^2+a$, niin saadaan $\frac{1}{2}ka^2+(k+b)a=a^2+a$.

Kertoimia vertailemalla saadaan yhtälöpari, jonka ratkaisuna on vakioiden k ja b arvot:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}k=1\\ k+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=2\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow\underline{\underline{g(t)=2t-1}}.$$

b) Muokataan ehdon 2° kaksoisepäyhtälön osamääriä erotusosamäärän $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

mukaisiin muotoihin, kun $x_0=0$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(1+x)-0}{x-0} \quad \le \quad \frac{f(x)-0}{x-0} \quad \le \quad 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} \quad \le \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \le \quad 1$$

Näin ollen erotusosamäärien raja-arvot, kun $x \to x_0$, eli kun $x \to 0$, voidaan rinnastaa kyseisten funktioiden derivaatan arvoiksi kohdassa $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} \quad \le \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \le \quad \lim_{x\to 0} 1$$

(Vasemmalla puolella oleva raja-arvo vastaa siis funktion $g(x) = \ln(1+x)$ derivaattafunktion $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ arvoa kohdassa $x = 0$).

$$g'(0) \le f'(0) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+0} \le f'(0) \le 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \le f'(0) \le 1 \ .$$

Viimeksi mainitusta kaksoisepäyhtälöstä seuraa välttämättä, että $\underline{\underline{f'(0) = 1}}$.

(*) Laske funktion $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ derivaatta. Osoita, että käyrän $y = e^{-x}\sin x$ ja x -akselin alueessa $x \ge 0$ rajoittamien alueiden $A_0, A_1, A_2, \ldots$ pinta-alat muodostavat geometrisen jonon.

Ratkaisu: Tulon derivoimissääntöä käyttäen $f'(x) = e^{-x}\cdot(\cos x - \sin x) - e^{-x}\cdot(\sin x + \cos x)$

$f'(x) = e^{-x}\cdot\cos x - e^{-x}\cdot\sin x - e^{-x}\cdot\sin x - e^{-x}\cdot\cos x = \underline{\underline{-2e^{-x}\cdot\sin x}}$.

Ratkaistaan käyrän $y = e^{-x}\cdot\sin x$ nollakohdat, kun $x \ge 0$:

Koska $e^{-x} > 0$, kaikilla x, saadaan nollakohdat yhtälöstä $\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = n\cdot\pi$ eli

$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

Nollakohtien määräämillä osaväleillä funktion $\sin x$ merkki vaihtuu osavälistä toiseen siirryttäessä siten, että välillä $[0,\pi]$ $\sin x \ge 0$, välillä $[\pi, 2\pi]$ $\sin x \le 0$, jne.

Yleisesti: $\sin x \ge 0$ välillä $[\, n\pi, (n+1)\pi]$, missä $n = 0,2,4,6,\ldots$, ja muilla osaväleillä $\sin x \le 0$.

Pinta-alat lasketaan siis vuoroin funktion $y = e^{-x}\cdot\sin x$, ja vuoroin funktion $y = -e^{-x}\cdot\sin x$ avulla, riippuen sinifunktion merkistä.

Kun $n = 0,2,4,6,\ldots$, niin pinta-ala $A_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cdot \sin x \, dx$.

Koska $D\left(e^{-x}(\sin x + \cos x)\right) = -2e^{-x} \cdot \sin x$, niin $\int -2e^{-x} \cdot \sin x \, dx = e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$ ja edelleen $\int e^{-x} \cdot \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$.

Nyt $\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cdot \sin x \, dx = \Big/_{n\pi}^{(n+1)\pi} -\frac{1}{2} e^{-x}(\sin x + \cos x)$

Kun $n = 1,3,5,7,\ldots$, niin pinta-ala $A_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} -e^{-x} \cdot \sin x \, dx$.