Kertausmoniste: Logaritmit ja eksponenttiyhtälöt

1 Logaritmin määritelmä

Logaritmien ymmärtämisen ja käytön kannalta oleellisin asia lienee logaritmin määritelmä. Logaritmi on eksponenttifunktion *käänteisfunktio*.

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a(x)$$

Yllä olevaa yhtäpitävyyttä on syytä tuijottaa niin kauan, että sen on sisäistänyt hyvin. Eksponenttiyhtälöiden kannalta oleellista on siis, että logaritmin avulla voidaan ratkaista tuntematon eksponentti.

Esimerkki 1. Ratkaistaan yhtälö $3^x = 9$.

$$\begin{aligned} &3^x = 9 \\ &\log_3(3^x) = \log_3 9 \\ &x = \log_3 9 \end{aligned}$$

Luvun 9 kolmikantaisen logaritmin likiarvon voi tarvittaessa laskea laskimella.

Algoritmi yleisen eksponenttiyhtälön $k^x = y$ on siis ottaa kantaluvun mukainen logaritmi puolittain yhtälöstä. Tämä on sallittua sillä logaritmi on määrittelyjoukossaan aidosti kasvava funktio. Muutamille logaritmeille on erityismerkintä: $\log_{10} = \lg$, $\log_e = \ln$ ja $\log_2 = \mathrm{ld}$.

2 Logaritmiyhtälöt

Yhtälöitä, joissa esiintyy logaritmeja ovat logaritmiyhtälöitä. Niiden ratkaiseminen on verrattain suoraviivaista, kun käyttöön otetaan tärkeimmät logaritmikaavat.

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(x^n) = n\log(x)$
- Kantaluvun vaihto a:sta b:ksi:
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Yllä olevilla kaavoilla monimutkaisetkin logaritmiyhtälöt voidaan ratkaista kutakuinkin seuraavan algoritmin mukaisesti:

1. Jos yhtälössä on useampia logaritmeja joilla on eri kantaluvut, muuta kaikille logaritmeille sama kantaluku.

2. Siirrä kaikki muuttujaa sisältävät logaritmit samallepuolelle yhtälöä.
3. Yhdistä muuttujaa sisältävät logaritmit yhdeksi käyttäen ensimmäistä ja toista kaavaa.
4. Ratkaise logaritmin sisällä oleva lauseke korottamalla yhtälö puolittain kantaluvun mukaisen luvun eksponentiksi.

Esimerkki 2. Ratkaistaan yhtälö $\log_4(x+2) - \log_2(7x+2) = 42$.

$$
\begin{aligned}
&\log_4(x+2) - \log_2(7x+2) = 42 \\
&\frac{\log_2(x+2)}{\log_2(4)} - \log_2(7x+2) = 42 \qquad || \log_2(4) = 2 \\
&\log_2 \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{(7x+2)} = 42 \\
&\log_2(\sqrt{x+2}(7x+2)) = 42 \\
&\frac{\sqrt{x+2}}{(7x+2)} = 2^{42}
\end{aligned}
$$

Yhtälön loppuun ratkaiseminen saattaa toisinaan olla työlästä.

3 Eksponenttiyhtälöt

Eksponentiaalista muutosta hyödyntävät soveltavat tehtävät ratkeavat tietynlaisella mallilla. Yhtälö, joka jää ratkaistavaksi on muotoa

$$A = A_0 k^x,$$

jossa A_0 on suureen A alkuperäinen arvo, k muutoskerroin ja x muutoskertojen lukumäärä. Jos tehtävänä on selvittää montako kertaa muutos on tapahtunut ennen kuin suure saa tietyn arvonsa, voidaan yhtälö ratkaista logaritmeilla. Vastaavasti jos muutoskerroin tulee selvittää, voidaan hyödyntää juuria.

Esimerkki 3. Tilille maksettava vuosittainen korko on 1,5%. Selvitetään kauanko kestää, että talletetut 5000 euroa kasvavat 6000 euroon.
Koska kasvuprosentti on 1,5, on muutoskerroin $k = 1,015$. Vuosien, eli muutoskertojen, lukumäärä saadaan nyt ratkaistua yhtälöstä

$$
\begin{aligned}
&6000 = 5000 \cdot 1,015^x \\
&1,015^x = \frac{6}{5} \\
&x = \log_{1,015} \frac{6}{5}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 4. Niin sanotun radiojodin eli jodin isotoopin 131 puoliintumisaika $T_{1/2} = 8,07$ päivää. Selvitetään montako prosenttia jodista hajoaa päivässä. Merkitään jodin määrää suureella A. Jodin määrä puolittuu puoliintumisajassa, joten muutoskerroin k voidaan ratkaista yhtälöstä $A = A_0 k^t$

$$
\begin{aligned}
&A = A_0 k^t \\
&\frac{1}{2} A_0 = A_0 k^{T_{1/2}} \\
&\frac{1}{2} = k^{8,07} \\
&k = \sqrt[8,07]{0,5} = 0,91769348 \approx 0,918
\end{aligned}
$$

Eli jodin määrää kuvaavaan eksponenttiyhtälöön saadaan muutoskertoimeksi 0,918 kun muutosten lukumäärä ilmoitetaan päivinä.

Tehtäviä

1. Ratkaise ilman laskinta
   (a) $3 \cdot 5^x = 17$
   (b) $\lg(x + 4) = 14$
   (c) $1,5^x = 9$
   (d) $\ln(3x + 3) = e^2$
   (e) $\lg(x^2 - x) - \lg x = 0$
   (f) $\lg(x - 1) = \lg x - 1$

2. Maanjäristysten voimakkuuksia arvioidaan Richterin asteikolla. Järistyksen voimakkuus riippuu energiasta, joka järistyksessä vapautuu. Asteikon mukaan järistyksen voimakkuus on $M = \frac{2}{3} \lg E - 7,9$, missä E on järistyksessä vapautunut energia. 26.12.2004 Intian valtameressä tapahtunut maanjäristys oli voimakkuudeltaan $M_1 = 9,0$ Richterin asteikolla. Kuinka monikertainen järistyksessä vapautunut energia oli verrattuna vuonna 1993 Intiassa tapahtuneeseen maanjäristykseen, jonka voimakkuus oli $M_2 = 6,4$? Vuonna 2004 järistyksessä syntyneessä tsunamissa menehtyi n. 200 000 henkilöä ja vuoden 1993 järistyksessä menehtyi n. 20 000. Onko uhrien lukumäärällä ja maanjäristyksen voimakkuudella yksikäsitteinen vastaavuus?

3. Maanjäristyksessä vapautuvan seismisen energian E ja Richterin asteikon lukeman M välillä on yhteys $\log_{10} E = 11,8 + 1,5M$. Rakennus on mitoitettu kestämään järistys, jossa vapautuva seisminen energia on 50% suurempi kuin seisminen energia järistyksessä, jonka voimakkuus Richterin asteikolla on 6,8. Kuinka voimakkaan järistyksen rakennus kestää Richterin asteikolla mitattuna? (yo-teht. k05/13)

4. Bakteeriviljelmän massa nelinkertaistuu vuorokaudessa. Kuinka monta prosenttia massa kasvaa kahdeksassa tunnissa?

5. Missä ajassa euro kasvaisi miljoonaksi, jos vuotuinen korko olisi 1%?

6. Auton arvo euroina määräytyy funktiosta $a(t) = 35000e^{-0,2t}$, jossa t on aika vuosina auton myyntihetkestä.
   (a) Laske auton hinta neljän vuoden ikäisenä.
   (b) Kuinka vanhana auton hinta on pudonnut puoleen?
   (c) Määritä $a'(2)$ ja $a'(10)$ ja tulkitse mitä saadut arvot ilmoittavat.

Vastauksia:

1. Tarkasta laskimella.
2. 7900-kertainen
3. 6,9
4. 58,7%
5. 1390 vuodessa
6. a) 15700 euroa, b) 3,5 vuotta, c) $a'(2) = -4700$, $a'(10) = -950$