Matemaattinen fysiikka: Derivointitehtäviä

1. Derivoi funktiot

   (a) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2$

   (b) $f(x) = 3x^2 - 3x - 4$

   (c) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$

   (d) $f(u) = 2u^2 - u + 3$, jossa $u(x) = x^2 - 1$

2. Derivoi funktio $f(x) = (2x^2 - x - 4)^2$ sekä avaamalla sulkeet, että hyödyntäen sisäfunktioa.

3. Johda osamäärän derivointikaava käyttäen hyväksi tulon derivaattaa.

4. Derivoi $f(x) = \sqrt{x}$. Mutkikkaampien juurilausekkeiden derivoinnissa voi käyttää myöskin sisäfunktiosijoitusta ja ketjusääntöä. Derivoi lisäksi funktiot $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ ja $f(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+1}}$.

5. Derivoi funktiot

   (a) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$

   (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

   (c) $f(x) = \sin(3x) + \sin^3 x$

6. Funktiolla $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + a$ on maksimiarvo 10. Mikä on funkiton minimiarvo?

7. Lampaalle erotetaan navetan seinämältä mahdollisimman suuri suorakulmion muotoinen aitaus, johon aitaa on käytettävissä 40 metriä. Laske alueen pinta-ala ja suorakulmion sivujen pituudet.

8. Kaikkia funktioita ei välttämättä voi derivoida. Funktion muutosnopeuden määrittäminen edellyttää tietysti, että funktio on jatkuva tarkastelukohdassa, ja lisäksi että sen kuvaajalla ei ole teräviä kulmia. Tarkastele, ovatko seuraavat paloittain määritellyt funktiot derivoituvia.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$

9. Eräs derivaatan sovelluksista matematiikassa liittyy raja-arvojen laskemiseen. Ranskalaismatematiikko Guillaume de L'Hospital julkaisi ilmeisesti Johann Bernoullin löytämän tuloksen epämääräisille osamäärämuotoisille raja-arvoille, jotka tulevat

muotoon ∞/∞ tai $0/0$. Näiden raja-arvojen arvoksi saadaan nimittäin sama kuin osoittajan ja nimittäjän derivaattojen osamäärän raja-arvosta. Näin ollen siis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

kun

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ tai } \pm\infty$$

Laske seuraavat raja-arvot tätä L'Hospitalin sääntönä tunnettua ominaisuutta käyttäen.

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$$

(c)

$$\lim_{x \to \infty} x \ln(1 - \frac{a}{x})$$

Vastauksia:

1. Tarkasta laskimella
2. Tarkasta laskimella
3. osoita
4. Tarkasta laskimella
5. Tarkasta laskimella
6. -22
7. $A = 200\,\mathrm{m}^2$, sivut 10 m ja 20 m
8. (a) ei, (b) on
9. (a) 3
   (b) 1/2
   (c) -a