

Matemaattinen fysiikka: Differentiaaliyhtälöitä

1. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

(a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2}$$

(b)

$$\frac{dx}{dt} = 3xt^2$$

Määritä lisäksi se ratkaisu, joka kulkee pisteen $(t, x) = (0, 2)$ kautta.

(c)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

2. Ratkaise alkuarvoprobleema

(a)

$$\frac{1}{3} \frac{dy}{dx} = (y + 1)(2x^2 + 2),$$

kun $y(0) = 3$.

3. Ovatko seuraavat differentiaaliyhtälöt eksakteja

(a) $2xydx + (1 + x^2)dy = 0$

(b) $ydx - xdy = 0$

(c) $(x + \sin y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0$

4. Varmista, että differentiaaliyhtälö on eksakti ja ratkaise se.

(a) $2xydx + (1 + x^2)dy = 0$

(b) $y^2dx + (2yx + 1)dy = 0$

(c) $(2y^2x - 2y^3)dx + (ey^3 - 6y^2x + 2yx^2)dy = 0$

5. Ratkaise kurssimateriaalin esimerkki 13 integroimalla ensin funktio $N(x, y)$ muuttujan y suhteen ja etenemällä sitä kautta.

6. Varmista että yhtälö on eksakti ja etsi sen implisiittinen ratkaisu.

(a) $(x + \sin y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$

(c) $(y + 2xy^3)dx + (1 + 3x^2y^2 + x)dy = 0$

Vastauksia:

1. a) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + C}$ b) $x = Ce^{t^3}$ c) $y = \sqrt{x^2 + 2C}$

2. $y = 4e^{2x^3+6x} - 1$

3. a) on b) ei c) on

4. a) $y = C/(x^2 + 1)$ b) $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4Cx}}{2x}$ c) vain implisiittinen ratkaisu

5. $y = \frac{C-x}{xe^x+2}$

6. a) $\frac{1}{2}x^2 + x \sin y - y^2 = C$ b) $2x + e^{xy} - y^2 = C$ c) $xy + x^2y^3 + y = C$