Matemaattinen fysiikka: Soveltavia differentiaaliyhtälötehtäviä

1. Ratkaise tasaisella kiihtyvyydellä putoavan kappaleen korkeutta kuvaava funktio $h(t)$, kun korkeutta kuvaa differentiaaliyhtälö
$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g.$$
Ajan hetkellä $t = 0$ kappale lähtee levosta korkeudelta 50m. Milloin kappale osuu maahan? Putoamiskiihtyvyyden arvo on $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$.

2. Sadepisara putoaa kohti maata painovoiman $G = mg$ vaikutuksesta. Pisaran nopeuden kasvaessa, alkaa ilmanvastus pienentää pisaran kiihtyvyyttä, siten että vastus on verrannollinen pisaran nopeuteen kv, missä k on verrannollisuuskerroin. Pisaran liikeyhtälö tulee tällöin muotoon
$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$
Vakion k suhde pisaran massaan m on määritetty kokeellisesti ja sen arvo on 30 1/s. Putoamiskiihtyvyydelle g voi käyttää tehtävässä arvoa $10\,\mathrm{m/s^2}$.
   (a) Ratkaise liikeyhtälöstä nopeuden lauseke ajan funktiona muuttujan erottamismenetelmällä. (Vinkki: Yhtälön pyörittely hieman helpottuu, jos merkitset $\frac{k}{m} = s$, sillä suhteen arvo on jo annettu tehtävänannossa.)
   (b) Pisara saavuttaa raja-nopeuden, minkä jälkeen sen nopeus ei enää muutu. Määritä tämä rajanopeus (Vinkki: Lausekkeen raja-arvolla voisi olla jotain tekemistä tämän kanssa.)
   (c) Kuinka pitkän ajan kuluttua pisara on saavuttanut 99% rajanopeudesta?

3. Kakku, jonka lämpötila on 21 °C, pannaan paistumaan uuniin, joka pysyy vakiolämpötilassa 225 °C. Kakun lämpötilan muutos aikayksikössä on suoraan verrannollinen uunin lämpötilan ja kakun lämpötilan erotukseen. Kymmenen minuutin kuluttua kakun lämpötila on 67 °C. Määritä kakun lämpötila T ajan t funktiona. Määritä funktion $T(t)$ avulla kakun lämpötila 40 minuutin kuluttua. Milloin uuniin unohtuneen kakun lämpötila saavuttaa mallin mukaan uunin lämpötilan? (YO-KOE k98t9b)

4. Bakteeripopulaation määrä $y(t)$ hetkellä $t \geq 0$ noudattaa differentiaaliyhtälöä $y'(t) = ay(t) - by(t)^2$, missä $a > b > 0$. Oletetaan, että $y(t) \in]0, \frac{a}{b}[$, jokaisella $t \geq 0$. Osoita yhtälöä ratkaisematta, että y on aidosti kasvava. Jos populaation kasvunopeus $y'(t)$ on suurimmillaan hetkellä $t_0 > 0$, niin mikä on populaation määrä $y(t_0)$ hetkellä t_0? (YO-KOE k99t9b)

5. Positiivinen, derivoituva funktio f on kasvava, ja sen kuvaaja kulkee pisteen (0,1) kautta. Funktion kuvaajan mielivaltaiseen pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ asetettu tangentti muodostaa yhdessä x-akselin ja suoran $x = x_0$ kanssa kolmion, jonka ala on $A = f(x_0)$. (YO-KOE s99t10)

6. Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolmetuntia myöhemmin 700. Määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sinä hetkenä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisuna hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä t. Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta? (YO-KOE k00t14)

7. Lohen viljelyaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalamäärä alkoi vähetä yhtälön
$$P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$$
mukaisesti. Tässä $P(t)$ on kalamäärä hetkellä t, ja aika t on mitattu viikkoina. Kuinka monen viikon kuluttua kaikki kalat olivat kuolleet? (YO-KOE k01t15)

8. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y' = \frac{y}{4x + x^2}.$$
(YO-KOE s04t14)

   Vinkki: erota muuttujat ja käytä x:n lausekkeeseen *osamurtokehitelmää!*

Vastauksia:

1. $h(t) = 50 - \frac{1}{2}gt^2$, 3,2 sekunnin kohdalla
2. (a) $v(t) = \frac{g}{s}(1 - e^{-st})$
   (b) 0,33 m/s
   (c) 0,15 s
3. $T(t) = 225 - 204e^{-0{,}0256t}$, lämpötila 40 minuutin kuluttua 152 °C, uunin lämpötilaa ei saavuteta koskaan
4. $y(t_0) = \frac{a}{2b}$
5. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$
6. $f'(t) = kf(t)$, määrä hetkellä t on $f(t) = 200e^{kt}$, missä $k = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}$. Viiden tunnin kuluttua 1600
7. 17 viikon
8. $y = K\sqrt[4]{\left|\frac{x}{4+x}\right|}$