

Matemaattinen fysiikka: Kompleksiluvut

1. Olkoon kompleksiluvut $z = 1 + 3i$ ja $w = 2 - 5i$. Laske

- (a) $z + w$
- (b) $z + 2w$
- (c) $w - z$
- (d) zw
- (e) $\frac{z}{w}$

2. Osoita, että kompleksilukujen $z_1 = a + bi$ ja $w = c + di$ osamääräksi voidaan johtaa

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

3. Imaginaariyksikköön liittyy mielenkiintoinen ominaisuus, joka on monesti näppärä kikka laskuissa tai kompleksilukujen sieventämisessä. Osoita, että

$$\frac{1}{i} = -i.$$

4. Esitä seuraavat kompleksiluvut kompleksitasossa:

- (a) $z = 1 - 3i$
- (b) $w = -2 + 2i$

5. Olkoon $z = -3 + 4i$ ja $w = 2 - i$. Laske.

- (a) $3z - 2w^*$
- (b) $zz^* + ww^*$
- (c) $\frac{z^*}{w^*}$
- (d) $\left(\frac{z}{w}\right)^*$

6. Osoita kompleksilukujen $z = a + ib$ ja $w = c + id$ ominaisuudet.

- (a) $a = \frac{1}{2}(z + z^*)$
- (b) $b = \frac{1}{2i}(z - z^*)$
- (c) $(z + w)^* = z^* + w^*$
- (d) $(zw)^* = z^*w^*$

7. Osoita Eulerin lausetta käyttäen Eulerin identiteetti

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

8. Muuta kompleksiluvut napakoordinaattiesitykseen.

(a) $z = 3 + 4i$

(b) $w = -4 + 4i$

9. Muunna kompleksiluvut karteesisen koordinaatiston esitykseen.

(a) $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b) $w = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Vastauksia:

1. (a) $3 - 2i$
(b) $5 - 7i$
(c) $1 - 8i$
(d) $17 + i$
(e) $-\frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$
2. osoita
3. osoita
4. -
5. (a) $-13 + 10i$
(b) 30
(c) $-2 - i$
(d) $-2 - i$
6. osoita
7. osoita
8. (a) $z = 5e^{-i \arctan(4/3)} \approx 5e^{-0,9273i}$
(b) $w = 4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$
9. (a) $z = \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2}i$
(b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}i$