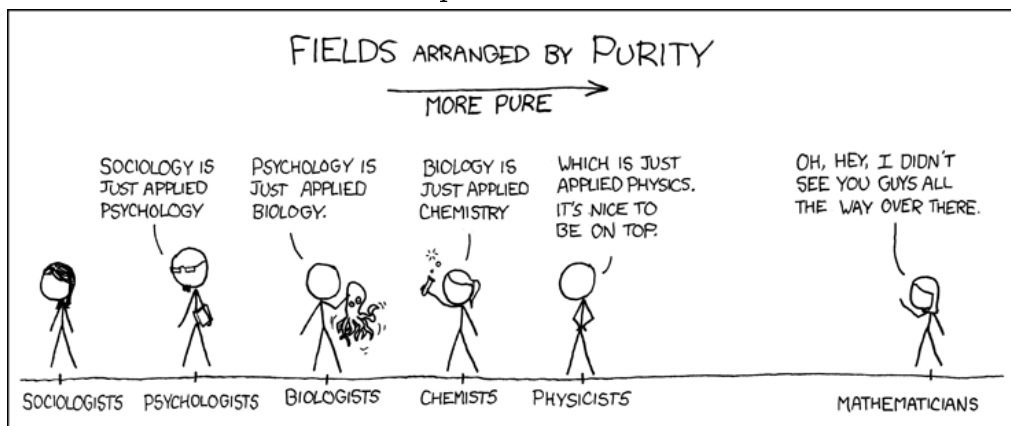


Johdatus yliopistofysiikkaan

Fysiikassa tarpeellisia matemaattisia taitoja

Tapio Hansson



kuva: xkcd, Randall Munroe, CC BY-NC 2,5

25. helmikuuta 2024

Sisällys

1	Vektorilaskentaa	6
1.1	Suuntajana	7
1.2	Vektorit koordinaatistossa	9
1.2.1	Vaaka- ja pystyvektorit	9
1.2.2	Karteesinen koordinaatisto	10
1.2.3	Komponentit	11
1.3	Ristitulo ja skalaarikolmitulo	15
1.3.1	Determinantti	15
1.3.2	Ristitulo	16
1.3.3	Skalaarikolmitulo	19
1.4	Napakoordinaatisto	20
1.5	3-ulotteiset koordinaatistot	21
2	Kompleksiluvut	26
2.1	Lukujoukot	27
2.2	Kompleksilukujen joukko	28
2.2.1	Kompleksilukujen laskutoimitukset	29
2.2.2	Kompleksilukujen graafinen esitys	30
2.2.3	Liittoluku eli kompleksikonjugaatti	31
2.2.4	Napakoordinaattiesitys	32
3	Funktiot, derivaatta ja integraali	34
3.1	Funktiot fysiikassa	34
3.2	Derivaatta	35
3.2.1	Derivointi	36
3.3	Differentiaaliyhtälöistä ja integroinnista	38
3.4	Integroimismenetelmiä	41
3.5	Integroimisniksejä	42
3.5.1	Sijoitusintegraali	43
3.5.2	Osittaisintegrointi	45
3.6	Fysiikan sovelluksia	47

<i>SISÄLLYS</i>	2
3.6.1 Työ ja energia	47
3.6.2 Laajenevan kaasun tekemä työ	48
4 Differentiaaliyhtälöitä	50
4.1 Separoituvat yhtälöt	50
4.1.1 Alkuarvoprobleemat	52
4.2 Eksaktit yhtälöt	52

Kuvat

1.1	Vektori ja jana	7
1.2	Vektorisumma	7
1.3	Vektorien välinen kulma	8
1.4	Vektorien kertominen luvulla	8
1.5	Paikkavektori	10
1.6	Koordinaatistomuunnos	11
1.7	Koordinaattimuunnoksia	12
1.8	Vektorin komponentit	12
1.9	Kantavektorit	13
1.10	Vektorin projektio	14
1.11	Ristitulo, public domain	17
1.12	Suuntaissärmiö, P.wormer - Own work, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons	20
1.13	Napakoordinaatisto, Fred the Oyster, CC BY-SA 4.0, Wikimedia Commons	21
1.14	Koorinaattimuunnos, public domain	22
1.15	Ruusukäyrä, Mets501, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons	23
1.16	Sylinterikoordinaatisto, Jack Ver, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons	24
1.17	Pallokoordinaatisto, public domain	25
2.1	Lukujoukot, Public Domain	27
2.2	Kompleksitaso, public domain	30
2.3	Kompleksikonjugaatti, Oleg Alexandrov, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons	31
2.4	Kompleksiluku napakoordinaatistossa, Kan8eDie Wikimedia Commons CC BY-SA 3.0	32
3.1	Tangenttisuora, Januszkaja, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons	36

3.2	xkcd, Randall Munroe, CC BY-NC 2,5, https://xkcd.com/626/	40
3.3	xkcd, Randall Munroe, CC BY-NC 2,5, https://xkcd.com/2117/	43
3.4	xkcd, Randall Munroe, CC BY-NC 2,5, https://xkcd.com/1201/	46
3.5	Tilavuuden muutos riippuu männän pinta-alasta ja liikkumasta matkasta.	49

Matemaattinen fysiikka

Tämä materiaali on suunniteltu oppimateriaaliksi lukion syventävällä opintojaksolla Johdatus yliopistofysiikkaan. Kurssilla syvennetään lukiomatematiikasta tuttuja käsitteitä, kuten vektoreita, derivointia ja integrointia erityisesti fysiikan tarpeissa, mutta myös puhtaan matematiikan valossa. Lisäksi tutustutaan kompleksilukuihin.

Oppimateriaalin on laadittu ja laajennettu legendaarisen Jukka Hongiston Matemaattinen fysiikka-kurssin pohjalta. Jukka pohti magnetohydrodynamiikkaa opiskellessaan opiskelukaverinsa kanssa, että missä on oppinut kaikkein keskeisimmät asiat matematiikasta, ja totesi, että lukion syventävillä kursseilla. Tämän oppimateriaalin on tarkoitus olla ne keskeisimmät asiat, joita ihminen elämässään tarvitsee.

Luku 1

Vektorilaskentaa

Vektorit ovat fysiikassa erittäin keskeisessä roolissa. Hyvin suuri osa fysiikan suureista on vektorisuureita, joiden käsittelyssä vektorilaskennan taidot ovat tärkeässä roolissa. Fysiikan vektorit ovat yleensä 2- tai 3-ulotteisia, ja tässä pitäydymmekin niissä, vaikka matemaatikoita useampien ulottuvuuksien mukaan ottaminen ei yleensä häiritsekään.

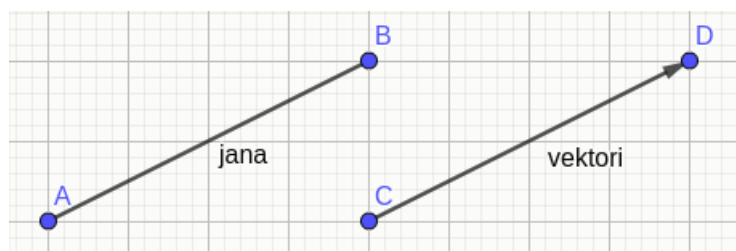
Lukiofysiikassa monien vektorisuureiden vektoriominaisuudet onnistutaan hävittämään tarkastelemalla esimerkiksi ainoastaan kohtisuoria tilanteita. Oleellisia vektorisuureita ovatkin paitsi tutut paikka, nopeus, kiihtyvyys ja voima, myös kulmanopeus, kulmakiihtyvyys, liikemäärä, impulssi, momentti, sekä sähkö- ja magneettikenttien voimakkuudet. Osa lukiossa käytettävistä kaavoista on myös yksinkertaistettu skalaarimuotoon. Todellisuudessa esimerkiksi

- vakiovoiman tekemä työ saadaan pistetulosta $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.
- voiman momentti on voiman etäisyyden ja voimavektorin ristitulo $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.
- hiukkasen magneettikentässä kokema voima on nopeuden ja vuontiheyden ristitulo $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.
- Pinnan läpi kulkema magneettivuo on pinta-alavektorin ja vuontiheyden pistetulo $\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}$.

Vektorin merkintänä käytetään yleisesti kirjaimen päälle vedettyä viivaa $\vec{v}$, mutta joissain lähteissä myös tummennettua kirjainta $\mathbf{v}$. Kun viiva jätetään merkitsemättä, viitataan pelkästään vektorin pituuteen. Vektorin $\vec{v}$ pituus on siis v .

1.1 Suuntajana

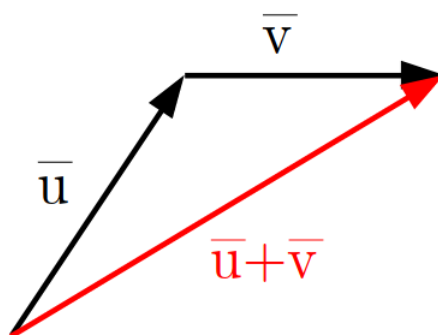
Vektorilla on kaksi ominaisuutta, suunta ja suuruus. Kiinteä alkupiste ei varsinaisesti kuulu vektorin ominaisuuksiin, vaikka varsinkin fysiikassa on usein hyvin olennaista kiinnittää vektori koordinaatistoon. Periaatteessa vektoria voi siis siirtää, mutta vektori ei ole enää sama vektori, mikäli sitä kääntää tai venyttää. Jana on symmetrinen suora kahden pisteen välillä. Vektorin erottaa janasta suunta, mikä tekee vektorista epäsymmetrisen otuksen.



Kuva 1.1: Pisteiden A ja B välinen jana ja vektori pisteestä C pisteeseen D.

Vektoria on tapana kuvata nuolella, jonka pituus kertoo suuruuden ja nuolen kärki kertoo suunnan. Suuretta, jolla ei ole suuntaa, mutta jolla on suuruus, kutsutaan skalaariksi.

Suuntanuolien yhteenlasku toteutetaan asettamalla nuolet peräkkäin, jolloin summavektori muodostuu ensimmäisen vektorin alkupisteestä viimeisen loppupisteeseen.

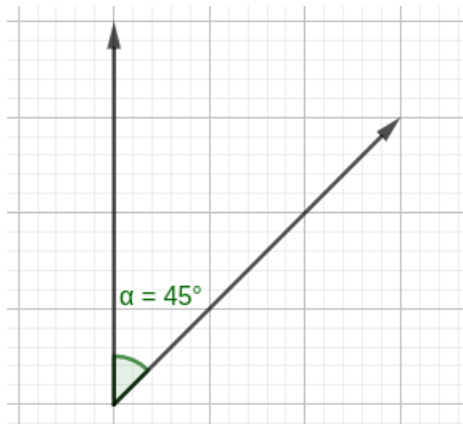


Kuva 1.2: Vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ summa.

Vektorien välinen kulma määritellään pienempänä kulmista, jotka syntyvät kun vektorit asetetaan lähtemään samasta pisteestä.

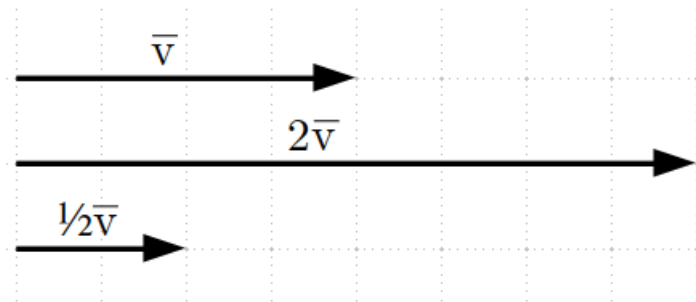
Yhteenlaskun lisäksi vektoreilla voi tehdä vähennyslaskuja ja kertolaskuja. Vähennyslasku saadaan aikaiseksi lisäämällä vastavektori

$$\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v}). \quad (1.1)$$



Kuva 1.3: Kuvassa olevien vektorien välinen kulma on 45° .

Vastavektori tarkoittaa vektoria, jonka pituus on yhtä suuri kuin vektorin itsensä, mutta suunta täsmälleen vastakkainen. Vektorin voi lisäksi kertoa reaaliluvulla. Tämä venyttää vektorin pituutta (tai kutistaa), mutta ei muuta suuntaa lainkaan.



Kuva 1.4: Vektorin $\bar{v}$ kertominen kahdella kaksinkertaistaa vektorin pituuden.

Esimerkki 1. Nopeuksien yhdistäminen. Yrität ajaa moottoriveneellä suoraan vastarannalla olevaan laituriin 20 metriä leveän joen yli, jonka virtausnopeus on 3 m/s. Kuinka kauas joudut laiturista, jos yrität ajaa suoraan nopeudella 5 m/s? Mikä oli todellinen nopeutesi?

Ratkaisu:

Aika joka ylitykseen kuluu saadaan laskemalla

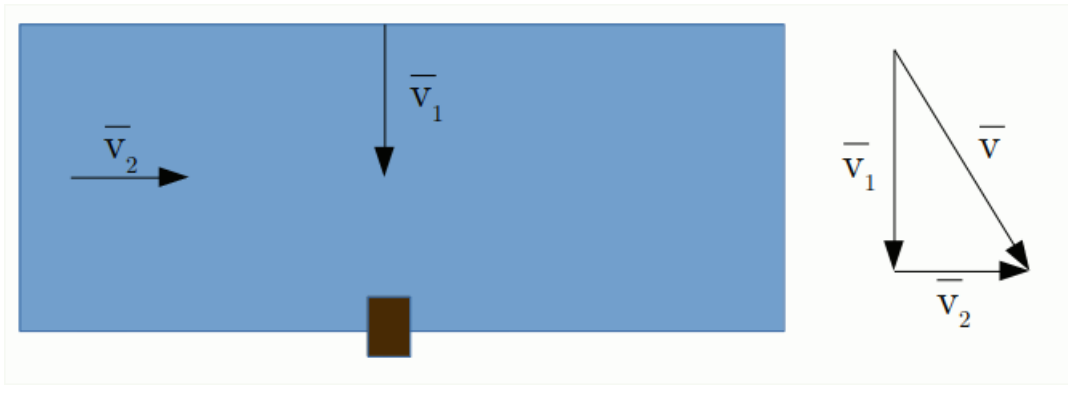
$$t = \frac{s}{v} = \frac{20 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 4 \text{ s.}$$

Tänä aikana ajaudut sivuun:

$$s = vt = 3 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} = 12 \text{ m.}$$

Kokonaisnopeus on joen nopeuden ja veneen nopeuden summavektorin pituus. Pythagoraan lauseen mukaan

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(3 \text{ m/s})^2 + (5 \text{ m/s})^2} \approx 5,83 \text{ m/s}$$



1.2 Vektorit koordinaatistossa

Koordinaatistossa vektori kiinnitetään alkupisteeseen ja loppupisteeseen. Usein alkupisteenä toimii koordinaatiston origo. Koordinaatistoja on useammanlaisia, ja toiset soveltuvat tiettyntyyppisiin ongelmiin paremmin kuin toiset. Koordinaatiston valinta on usein ensimmäinen askel fysiikan tehtävän ratkaisussa. Esimerkiksi kahden kappaleen liikettä voi tarkastella ns. laboratoriokoordinaatistossa, jossa kappaleet liikkuvat kiinnitetyn taustan päällä, tai toisen kappaleen voi kiinnittää lepokoordinaatistoon, jolloin se pysyy paikoillaan toisen kappaleen liikkeessä suhteessa siihen. Lisäksi voidaan tarkastella esimerkiksi massakeskipistekoordinaatistoa, jossa molemmat kappaleet liikkuvat suhteessa yhteiseen massakeskipisteeseen. Koordinaatiston valinta ei muuta tilanteen fysiikkaa, mutta se voi helpottaa ongelman matemaattista ratkaisemista.

1.2.1 Vaaka- ja pystyvektorit

Usein, varsinkin matematiikassa, on tapana merkitä vektoreita niin sanotulla *matriisimerkinnällä*, jossa vektorin komponentit merkitään järjestettyyn listaan. Lista kirjoitetaan joko pysty- tai vaaka-asentoon. Matriisilaskennassa on toisinaan oleellista merkitystä sillä, kummin päin vektori kirjoitetaan, mutta toistaiseksi seikka on lähinnä merkintätekniinen.

Vaakavektorimerkinnässä on lisäksi kaksi merkintätapaa, joista toisessa alkiot erotetaan pilkulla ja toisessa ei. Vektorin $\bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ erilaiset merkintätavat ovat

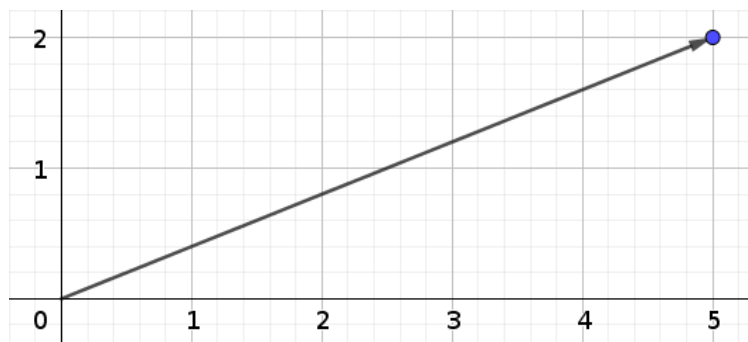
$$\bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = (v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Pystyvektorin tapauksessa käytetään joskus hakasulkeiden tilalla tavallisia kaarisulkeita, mutta tässä materiaalissa pitäydytään hakasulkeiden käyttöön.

Huomautus 1. Abitin kaavaeditoriin hakasulkumatriisiin saa kirjoittamalla kaavatilaan komennon `\bmatrix` ja painamalla enter.

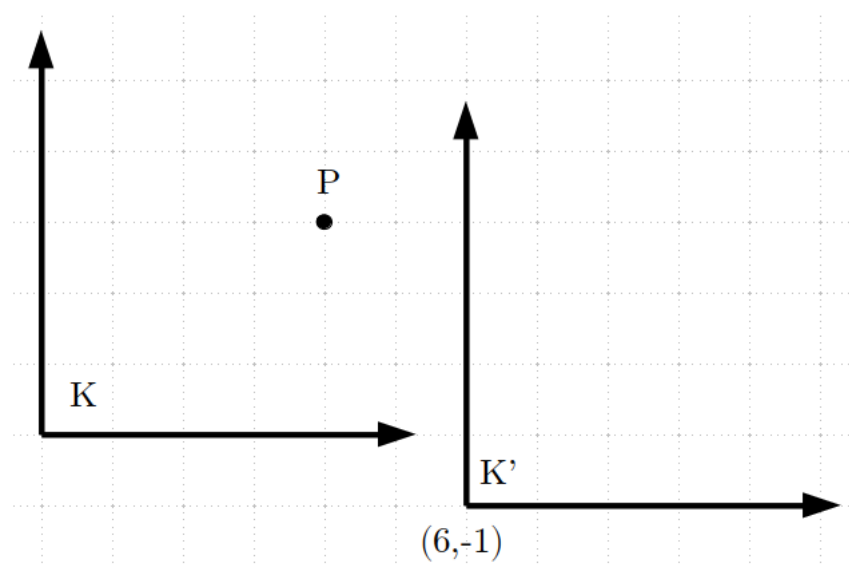
1.2.2 Karteesinen koordinaatisto

Tutuin koordinaatisto lienee karteesinen koordinaatisto. Kaksiulotteisessa karteesisessa koordinaatistossa, eli xy -koordinaatistossa kappaleen paikka määrittyy kahden koordinaatin mukaan. Koordinaatit kertovat kappaleen etäisyyden origosta vaaka- ja pystysuorassa suunnassa. Piste koordinaatti ilmoitetaan muodossa (x,y) , jossa x kertoo vaakasuoran etäisyyden ja y pystysuoran. Origosta pisteeseen (x,y) kulkevaa vektoria kutsutaan pisteen *paikkavektori*ksi.



Kuva 1.5: Piste $(5,2)$ paikkavektori.

Kappaleiden sijainti riippuu koordinaatistosta. Jos halutaan siirtyä koordinaatistosta toiseen tulee tehdä *koordinaatistomuunnos*. Linearisessa koordinaatistomuunnoksessa toisen koordinaatiston origo on eri paikassa kuin toisen, mutta koordinaatistot eivät ole kiertyneet toistensa suhteen. Lineaarista koordinaatistomuunnosta havainnollistetaan kuvassa 1.6.



Kuva 1.6: Koordinaatistossa K pisteen P koordinaatit ovat $(4,3)$ ja koordinaatistossa K' $(-2,4)$.

Yleisesti lineaarinen koordinaatistomuunnos, eli origon siirto koordinaatistosta K koordinaatistoon K' tehdään vähentämällä koordinaatiston K koordinaateista K' :n origon koordinaatit. Kuvan 1.6 tapauksessa K' :n koordinaatit saadaan seuraavasti:

$$\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

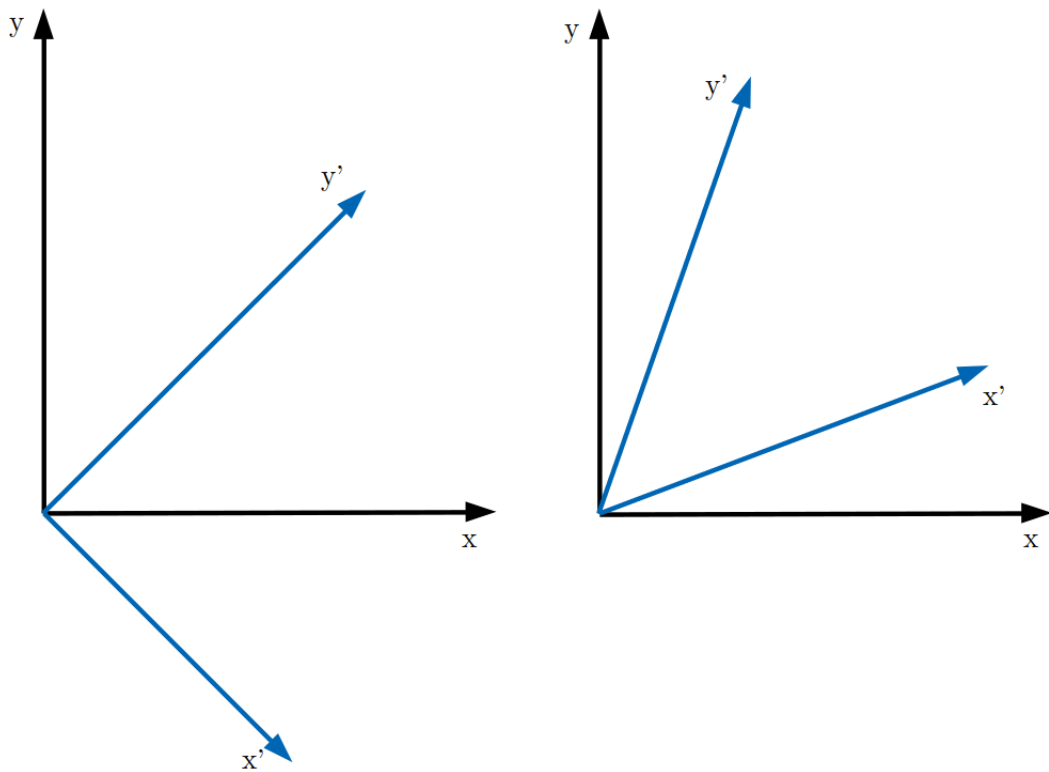
1.2.3 Komponentit

Vektorilaskenta helpottaa fysiikan ongelmien ratkaisua usein komponenttien ansiosta. Yleisesti vektori voidaan jakaa minkä tahansa kahden erisuuntaisen vektorin suuntaisiin komponentteihin. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat kaksi erisuuntaista tason vektoria, saadaan mikä tahansa tason vektori kirjoitettua näiden vektorien avulla

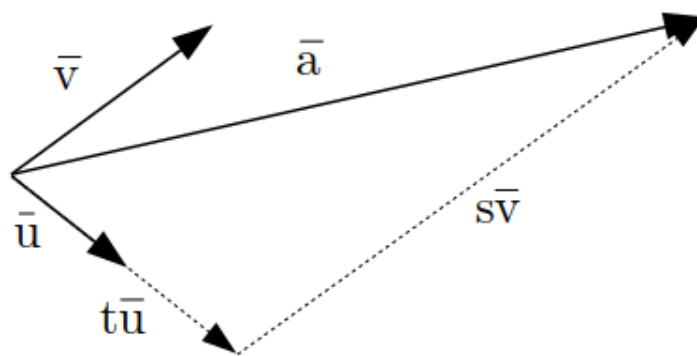
$$\vec{a} = t\vec{u} + s\vec{v}, \quad (1.3)$$

missä t ja s ovat reaalilukuja. Sanotaan, että vektori $\vec{a}$ on vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ *linearikombinaatio*.

Vektoreita $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ kutsutaan kantavektoreiksi ja sanotaan, että ne virittävät koko kaksiulotteisen vektoriavaruuden. Kantavektoreiksi voidaan valita

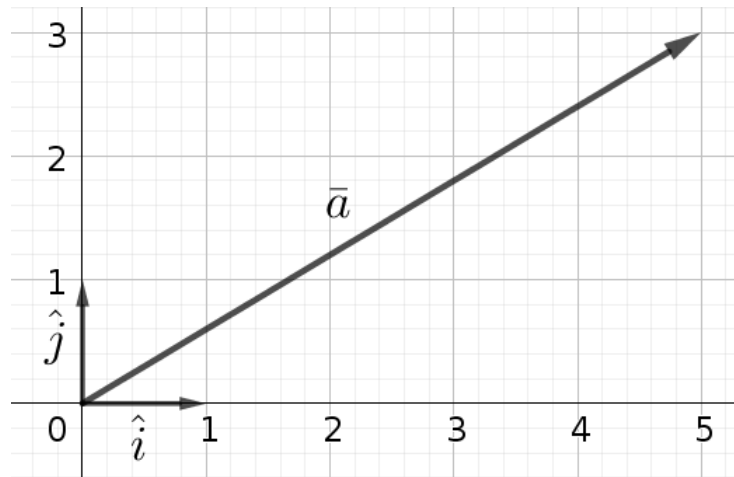


Kuva 1.7: Koordinaattimuunnos voi olla origon siirtämisen lisäksi myös muunlainen. Koordinaatiston voi kiertää, eikä koordinaattiakselienkaan tarvitse välttämättä olla kohtisuorassa. Koordinaatistoa, jossa akselit ovat kohtisuorassa sanotaan *ortogonaaliseksi*. Epäortogonaalisia koordinaatistoja tarvitaan paljon suhteellisuusteoriassa.



Kuva 1.8: Vektori $\bar{a}$ voidaan jakaa mielivaltaisten suuntaisten vektorien komponentteihin.

mitkä tahansa kaksi erisuuntaista vektoria, mutta yksinkertaisin ja yleisin tapa ilmaista vektorit on koordinaattiakselien suuntaisten yksikkövektorien $\hat{i}$ ja $\hat{j}$ avulla. Kolmiulotteisen avaruuden virittäminen vaatii myös kolmannen kantavektorin, joka yleensä valitaan z -akselin suuntaiseksi yksikkövektoriksi $\hat{k}$.



Kuva 1.9: Kuvan vektori $\bar{a}$ voidaan ilmoittaa kantavektorien $\hat{i}$ ja $\hat{j}$ avulla $\bar{a} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$.

Komponenttiesitys on käytännöllinen laskuissa, sillä vektorien yhteen- ja vähennyslasku sekä reaaliluvulla kertominen voidaan kaikki tehdä komponentteittain. Fysiikassa ollaan usein kiinnostuneita esimerkiksi pinnan magneettikenttää vastaan kohtisuorasta komponentista, tai jonkin voiman x - ja y -suuntaisista komponenteista. Esimerkiksi Newtonin liikeyhtälöt on tapana kirjoittaa komponentteittain.

Esimerkki 2. Vektorien yhteenlasku: Olkoon vektorit $\bar{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ ja $\bar{u} = -\hat{i} + 4\hat{j}$. Tällöin

$$\bar{v} + \bar{u} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{i} + 4\hat{j} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

ja

$$\bar{v} - \bar{u} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{i} - 4\hat{j} = 4\hat{i} - 6\hat{j}.$$

Kartesisisessa koordinaatistossa koordinaattiakselit ovat kohtisuorassa. Tällöin vektorin pituus, eli *normi*, saadaan laskettua komponenteista Pythagoraan lauseen avulla.

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.4)$$

Kuten aiemmin mainittiin, on fysiikassa usein tarpeen etsiä vektorin komponentteja tietyssä suunnassa. Esimerkiksi magneettikenttävektorin käämin

pinnan suuntainen komponentti on usein tarpeen. Vektorin *skalaarikomponentti* saadaan laskettua vektorien välisen pistetulon avulla. Karteesisen koordinaatiston pistetulo on

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.5)$$

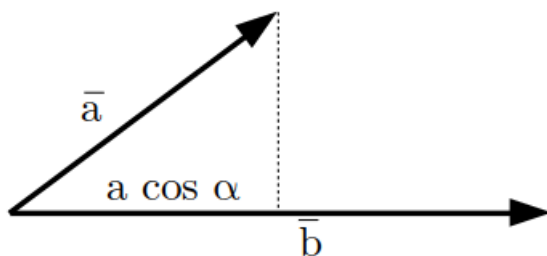
Huomautus 2. Pistetulon tuloksena on reaaliluku, eikä vektori. Tästä syystä sitä kutsutaan myös skalaarituloksi.

Geometrisesti pistetulo kuvaa sitä, kuinka paljon yhteistä suuntaa vektoreilla on. Mikäli pistetulo on nolla, ovat vektorit täsmälleen kohtisuorassa. Negatiivinen pistetulo vastaavasti tarkoittaa, että vektoreilla on enemmän vastakkaista suuntaa, eli niiden välinen kulma on yli 90° . Tarkemmin ottaen vektorien välinen kulma voidaan laskea pistetulon ja vektorien pituuksien avulla.

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}, \quad (1.6)$$

missä $\hat{a}$ ja $\hat{b}$ ovat vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ suuntaisia yksikkövektoreita.

Skalaariprojektio a_b tarkoittaa vektorin $\bar{a}$ projektion pituutta vektorilla $\bar{b}$. Tämä saadaan laskettua kulman avulla, sillä projektio muodostaa vektorin kanssa suorakulmaisen kolmion, jonka toinen kateetti skalaariprojektio on.



Kuva 1.10: Vektorin $\bar{a}$ skalaariprojektio vektorille $\bar{b}$ on $\bar{a}$:n pituus kerrottuna vektoreiden välisen kulman kosinilla.

Vektorin $\bar{a}$ skalaariprojektio vektorin $\bar{b}$ suunnassa saadaan, kun vektorin $\bar{a}$ pituus kerrotaan vektorien välisen kulman kosinilla. Kun α on vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma, skalaariprojektio on

$$a_b = |\bar{a}| \cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \bar{a} \cdot \hat{b}. \quad (1.7)$$

Toisin sanoen skalaariprojektio on vektorin $\vec{a}$ pistetulo $\vec{b}$:n suuntaisen yksikkövektorin kanssa.

Skalaariprojektioista saadaan vektorin $\vec{a}$ vektorin $\vec{b}$ suuntainen komponenttivektori, eli vektoriprojektio $\vec{a}_b$. Yleisesti, kun halutaan vektori tiettyyn suuntaan, kerrotaan haluttu pituus haluttua suuntaa vastaavalla yksikkövektorilla. Niinpä vektoriprojektio saadaankin, kun skalaariprojektio kerrotaan vektorin $\vec{b}$ suuntaisella yksikkövektorilla.

$$\vec{a}_b = (\vec{a} \cdot \hat{b})\hat{b} \quad (1.8)$$

Esimerkki 3. Lasketaan vektorin $\vec{a} = [1 \ 2 \ 3]$ komponentti vektorin $\vec{b} = [4 \ 5 \ 6]$ suunnassa.

Vektoin $\vec{b}$ suuntainen yksikkövektori on:

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{[4 \ 5 \ 6]}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}} = \left[\frac{4}{\sqrt{77}} \quad \frac{5}{\sqrt{77}} \quad \frac{6}{\sqrt{77}} \right]$$

Skalaarikomponentiksi saadaan siten

$$\vec{a} \cdot \hat{b} = 1 \cdot \frac{4}{\sqrt{77}} + 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{77}} + 3 \cdot \frac{6}{\sqrt{77}} = \frac{32}{\sqrt{77}}.$$

Vektorikomponentti saadaan yksikkövektorin $\hat{b}$ suunnalla

$$(\vec{a} \cdot \hat{b})\hat{b} = \frac{32}{\sqrt{77}} \cdot \left[\frac{4}{\sqrt{77}} \quad \frac{5}{\sqrt{77}} \quad \frac{6}{\sqrt{77}} \right] = \left[\frac{128}{77} \quad \frac{160}{77} \quad \frac{192}{77} \right]$$

1.3 Ristitulo ja skalaarikolmitulo

Kolmiulotteisen vektoriavaruuden vektorien välille voidaan määrittää pistetulon lisäksi myös toinen kertolasku, jota kutsutaan ristituloksi tai vektorituloksi. Ristitulon laskemiseksi tarvitsemme kuitenkin ensiksi *determinanttia*.

1.3.1 Determinantti

Determinantti on vektori- ja myöhemmin matriisialgebran kätevä työkalu. Vektorilaskennassa sen avulla voidaan laskea esimerkiksi ristituloja ja tason parametrimuotoisia yhtälöitä.

Determinanttia kannattaa ajatella merkintänä, joka tiivistää pitkän lausekkeen. 2×2 -determinantti määritellään:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (1.9)$$

Yhtälö (1.9) saattaa näyttää yksinkertaiselta, mutta kun determinanttiin tulee lisää rivejä, pitenee lauseke jo huomattavasti. Yleisimmin tarvittujen 3×3 -determinanttien laskemiseen tarvitaan nimittäin 2×2 -kokoisia alideterminantteja:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Kokonaan avattuna kolmirivinen determinantti on siis

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg. \quad (1.11)$$

Nelirivisiin determinantteihin tarvittaisiin vastaavasti kolmirivisiä alideterminantteja ja niin edelleen. Suurten determinanttien laskemiseen käytetäänkin yleensä tietokonetta. (Paitsi Viljami, joka avasi viisirivisen determinantin käsin.)

Huomautus 3. Abitin kaavaeditorissa determinanttimerkinnän saa kirjoittamalla kaavatilaan pikakomennon `\vmatrix` ja painamalla enter.

1.3.2 Ristitulo

Vektoreiden $\bar{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ ja $\bar{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ välinen ristitulo on määritelty determinanttina, jossa ylimmälle riville asetetaan yksikkövektorit:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

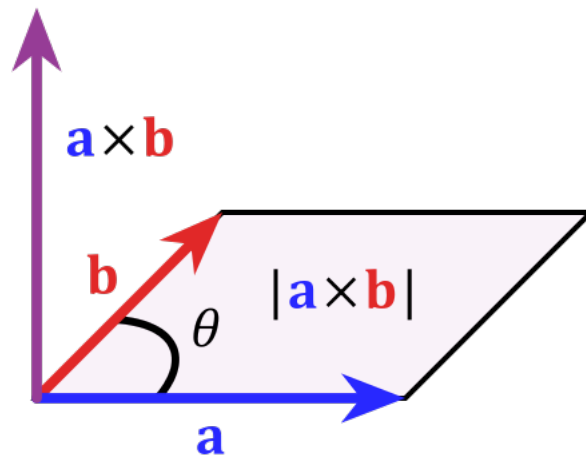
Esimerkki 4. Vektoreiden $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ja $\bar{b} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ välinen

ristitulovektori on

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} \end{aligned}$$

Huomautus 4. Ristitulon symboli saadaan abitin kaavaeditorissa pikakomennolla `\times`.

Ristitulon tulona saadaan siis vektori, toisin kuin pistetulon tapauksessa. Geometrisesti ristitulovektori asettuu kohtisuoraan molempia vektoreita vastaan, ja siten myös kohtisuoraan näiden määräämää tasoa vastaan. Ristitulon avulla onkin siis äärimmäisen helppoa määrittää tason normaalivektori.



Kuva 1.11: Ristitulovektori on kohtisuorassa alkuperäisiä vektoreita vastaan.

Lisäksi vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ristitulovektorin pituus antaa vektoreiden virittämän suunnikkaan pinta-alan. Suunnikkaan pinta-alan geometrisen kaavan avulla saammekin ristitulovektorin pituudelle skalaarimuotoisen kaavan:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta, \quad (1.13)$$

missä θ on vektoreiden välinen kulma.

Esimerkki 5. Vektoreiden $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ja $\vec{b} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ virittämän suunnikkaan ala on niiden välisen ristitulovektorin pituus. Ristitulo laskettiin

jo edellä, joten nyt riittää laskea vektorin pituus.

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} \approx 7,35$$

Vektorien välisen kulman voi määrittää sekä pistetulon, että ristitulon avulla. Ristitulosta saadaan

$$\sin \theta = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|} \approx \frac{7,35}{3,74 \cdot 8,77} \approx 0,22,$$

josta kulma

$$\theta = 12,95^\circ$$

Vastaavasti pistetulosta

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \theta$$

saadaan kosini

$$\cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \approx \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{3,74 \cdot 8,77} \approx 0,9756,$$

ja kulmaksi

$$\theta = 12,95^\circ.$$

Ristitulolla on muutamia ominaisuuksia, jotka saattavat helpottaa sen käyttöä:

- Vaihdamalaki ei ole suoraan voimassa. Sen sijaan ristitulon sanotaan olevan *antikommutatiivinen*, eli

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}). \quad (1.14)$$

- Osittelulaki yhteenlaskun suhteen on sen sijaan voimassa:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}. \quad (1.15)$$

- Myös reaaliluvulla kertominen toimii kuten pistetulolle:

$$r\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times r\bar{b} = r(\bar{a} \times \bar{b}) \quad (1.16)$$

- Tulon nollasääntö pätee hieman sovellettuna: Jos $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, on $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = 0$ tai sitten $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisia ($\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$).

Koska ristitulo on määritelty vain kolmiulotteisessa avaruudessa, on sillä runsaasti fysiikan sovelluksia. Sitä tarvitaan usein pyörimisen mekaniikassa, sillä voiman momentti on määritelty ristitulon avulla. Ristituloa tarvitaan myös sähkömagneettisen Lorenz-voiman kanssa, joka kohdistuu magneettikentässä liikkuvaan varattuun hiukkaseen.

Matematiikassa ristituloa voi soveltaa hyvin tason normaalivektorin määrittämiseen, sillä tason minkä tahansa suuntavektoreiden ristitulovektori on aina tason normaalivektori. Tason yksikkönormaali voidaankin määrittää laskemalla ensin ristitulovektori ja jakamalla se pituudellaan:

$$\hat{n} = \frac{\bar{s}_1 \times \bar{s}_2}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}, \quad (1.17)$$

missä $\hat{n}$ on tason yksikkönormaali ja $\bar{s}_1$ ja $\bar{s}_2$ ovat tason jotkin suuntavektorit.

Edellä mainittu tulon nollasäännön sovellus antaa myös mahdollisuuden tutkia vektoreiden yhdensuuntaisuutta ristitulon avulla, sillä jos molemmat vektorit ovat nolasta poikkeavia, on niiden ristitulo nolla jos ja vain jos vektorit ovat yhdensuuntaiset (saman- tai vastakkaissuuntaiset).

1.3.3 Skalaarikolmitulo

Skalaarikolmitulo, tai lyhyemmin kolmitulo määritellään kolmen vektorin kesken. Ristitulovektorin pituus vastaa vektorien viritämän suunnikkaan pinta-alaa, ja vastaavasti skalaarikolmitulon arvo vastaa kolmen vektorin muodostaman *suuntaissärmiön* tilavuutta. Skalaarikolmitulo vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ välillä määritellään

$$V = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}. \quad (1.18)$$

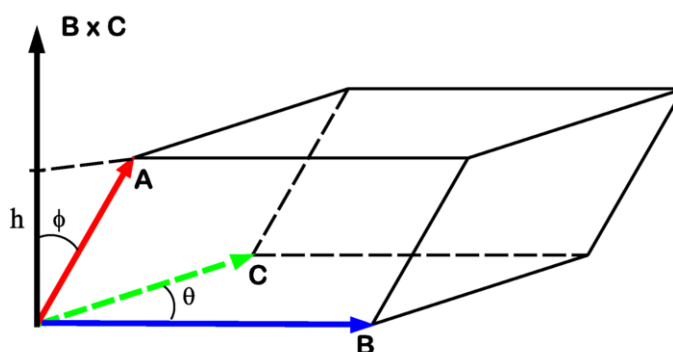
Skalaarikolmitulosta tuleekin siis tuloksena skalaari, sillä ensin lasketaan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen ristitulo, jonka jälkeen saadun vektorin, ja vektorin $\bar{c}$ välinen pistetulo. Tulojen järjestyksellä ei itseasiassa ole merkitystä, sillä vaikka ristitulon ja pistetulon vaihtaa, tulos on edelleen sama

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}). \quad (1.19)$$

Asiaa enempiä perustelematta voidaan todeta, että skalaarikolmitulon voi laskea myös suoraan yhdellä determinantilla. Näin säästää hieman välivaiheita laskussa.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.20)$$

Koska skalaarikolmitulo antaa suuntaissärmiön tilavuuden, voidaan huomata, että mikäli skalaarikolmitulon arvo on nolla, kaikki vektorit ovat samassa tasossa!



Kuva 1.12: Kolme erisuuntaista vektoria virittää suuntaissärmiön, kun ne lähtevät samasta pisteestä. Vektorikolmitulolla voi laskea suuntaissärmiön tilavuuden.

1.4 Napakoordinaatisto

Tasossa toinen yleisesti käytetty koordinaatisto on nimeltään napakoordinaatisto (eng. polar coordinate system). Vektorin kuvaamiseksi tarvitaan aina yhtä monta lukua, kuin sillä on ulottuvuuksia. Niinpä tason vektoriin tarvitaan kaksi ja tila-avaruuden vektoriin kolme. Tavallisessa karteesisessä tasokoordinaatistossa nämä luvut ovat tietysti vektorin x - ja y -komponentit, mutta vektorin voi kuvata myös muilla tavoin. Napakoordinaatistossa luvut ovat vektorin pituus r ja suuntakulma θ .

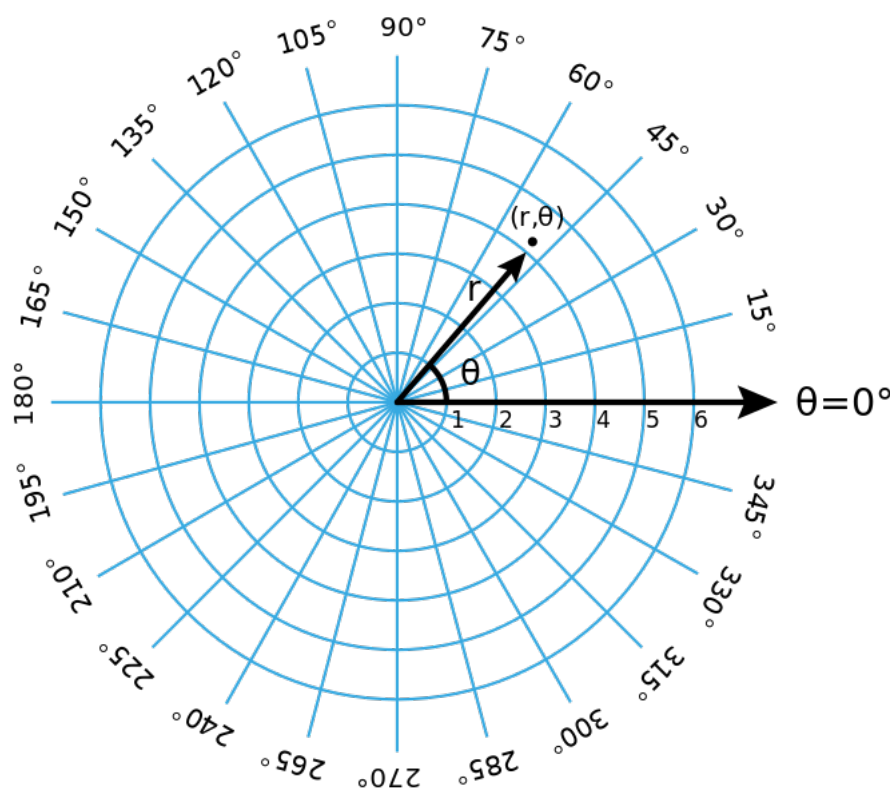
Kulma 0° on positiivisen x -akselin suunnassa, ja kulma kasvaa siitä vastapäivään kiertämällä. Jokainen tason piste voidaankin nyt esittää kun tunnetaan sen etäisyys origosta, sekä suuntakulma, johon se on sijoittunut. Koordinaattimuunnos karteesisen ja napakoordinaattien välillä on helppo tehdä, kun napakoordinaatit tunnetaan. Tällöin vektori muodostaa suorakulmaisen kolmion hypotenuusan ja suuntakulma toisen terävistä kulmista. Trigonometrinen funktioiden avulla saadaan

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.21)$$

Napakoordinaatiston vektori kirjoitetaan muodossa (r, θ) .

Käänteismuunnos karteesisista koordinaateista napakoordinaatteihin voidaan myös päätellä kolmion avulla, mutta jätetään sen laatiminen harjoitustehtäväksi.

Tietyissä tilanteissa napakoordinaatit yksinkertaistavat käsillä olevaa ongelmaa huomattavasti. Kuten aiemmin jo todettiin, koordinaatiston valinta ei muuta fysiikkaa, eli ongelman voi periaatteessa ratkaista missä tahansa



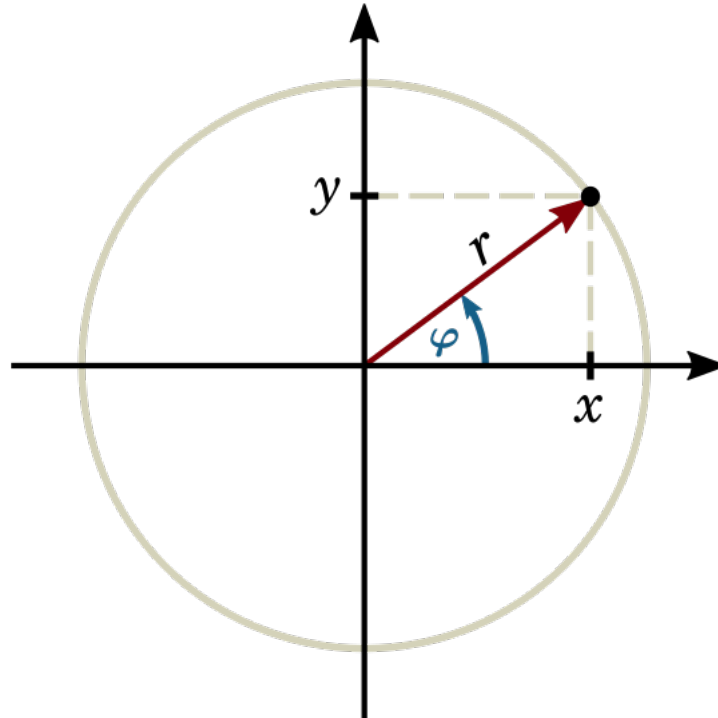
Kuva 1.13: Napakoordinaatisto

koordinaatistossa. Ympyräsymmetrisissä systeemeissä napakoordinaatit ovat useimmiten erittäin käytännöllisiä, sillä silloin käyrien yhtälöt napakoordinaatistossa ovat yleensä hyvin yksinkertaisia, ja karteesisessa varsin monimutkaisia. Fysiikassa koordinaatisto on yleensä mahdollista kiinnittää myös mielivaltaiseen paikkaan, joten ongelman ratkaisuun vaikuttaa myös paljon se, mihin origo on asetettu.

Esimerkiksi origokeskisen ympyrän yhtälö on erittäin yksinkertainen, sillä se on yhtälö, jossa r on vakio (vrt. karteesisen koordinaatiston pysty- ja vaakasuorat). Mikäli kulma θ on vakio, muodostuu napakoordinaatistoon origon kautta kulkeva suora.

1.5 3-ulotteiset koordinaatistot

Karteesisen koordinaatiston etu on, että jokainen komponentti siinä on aina samanlainen. Kolmannen ulottuvuuden lisääminen ainoastaan lisää vektoriin yhden luvun, jonka luonne on aivan samanlainen kuin kahden aiemman-

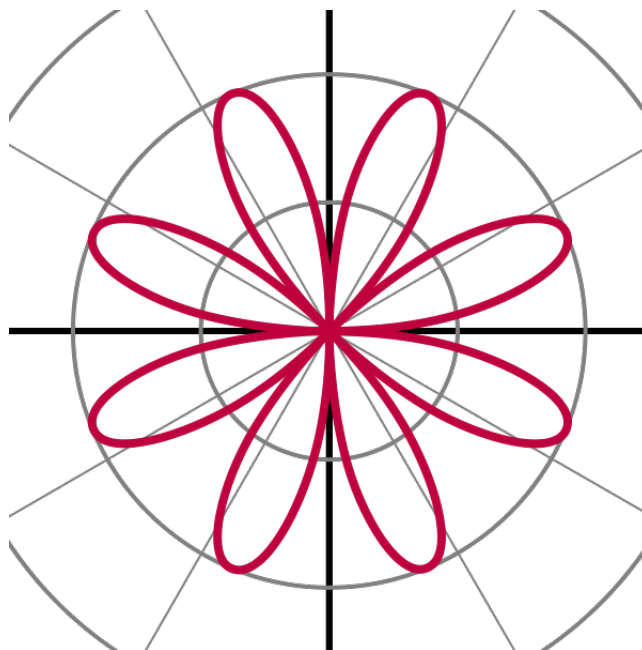


Kuva 1.14: Koordinaattimuunnos napakoordinaateista karteesisiin toimii samaan tapaan kuin yksikköympyrä.

kin. Karteesinen koordinaatisto sopiikin hyvin tiettyihin tilanteisiin, mutta fysiikassa kohdataan varsin usein esimerkiksi pallosymmetrisiä ilmiöitä, jolloin karteesinen koordinaatisto ei ole omiaan kuvaamaan sitä. Pistevarauksen luoma sähkökenttä tai säteilylähteen lähettämä säteily ovat esimerkkejä tasaisesti jokaiseen suuntaan leviävästä pallosymmetrisestä ilmiöstä.

Toinen 3-ulotteinen koordinaatisto on *sylinterikoordinaatisto*. Se on yksinkertainen laajennos napakoordinaatistoon, jossa napakoordinaatiston keskele lisätään z -akseli, kuten karteesisessa koordinaatistossakin. Tällöin pisteen paikka avaruudessa määräytyy kolmella luvulla, jotka ovat napakoordinaatiston mukainen kulma θ , etäisyys pystyakselista r , sekä korkeus z nollatasoon nähden.

Karteesisten koordinaattien muuntaminen sylinterikoordinaateiksi on helppoa, sillä x - ja y -koordinaatit muuntuvat kuten napakoordinaatiston tapauk-



Kuva 1.15: Ruusukäyrän yhtälö on verrattain yksinkertainen napakoordinaateissa $r(\theta) = a \cos(k\theta + \varphi_0)$. Parametri a kuvaa terälehtien pituutta. Jos k on pariton kokonaisluku, muodostuu käyrään k terälehteä. Mikäli k on parillinen, muodostuu $2k$ terälehteä.

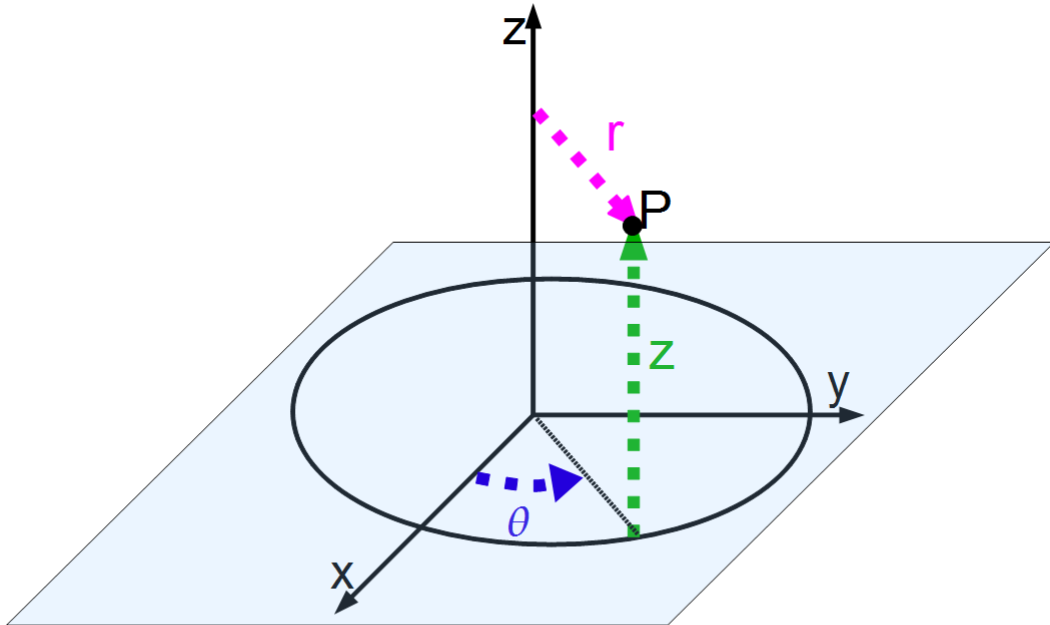
sessä, ja z -koordinaatille ei tapahdu mitään.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (1.22)$$

Sylinterikoordinaatiston vektori on tapana kirjoittaa muodossa (r, θ, z) .

Myös pallokoordinaatistossa pisteen paikka kuvataan kolmella luvulla. Yksi luvuista on suora etäisyys origosta r ja kaksi muuta kulmia. Toinen kulmista, ns. *atsimuuttikulma* φ saadaan samalla tavalla, kuin napakoordinaateissa tai sylinterikoordinaateissakin. Toinen taas, ns. *inklinaatiokulma* θ , saadaan poikkeamana pystysuunnasta, eli kulma on säteen r ja z -akselin välinen.

Fysiikassa pallokoordinaatiston vektori on tapana kirjoittaa (r, θ, φ) . Tämä käytäntö on kansainvälisen standardijärjestön ISO:n mukainen nimeämiskäytäntö, mutta jostain syystä matematiikan piirissä käytetään merkin-
töjä, joissa θ ja φ vaihtavat paikkaa, niin että keskimääräinen koordinaatti tarkoittaa atsimuuttikulmaa ja viimeinen inklinaatiokulmaa. Tällä kurssilla



Kuva 1.16: Sylinterikoordinaatisto.

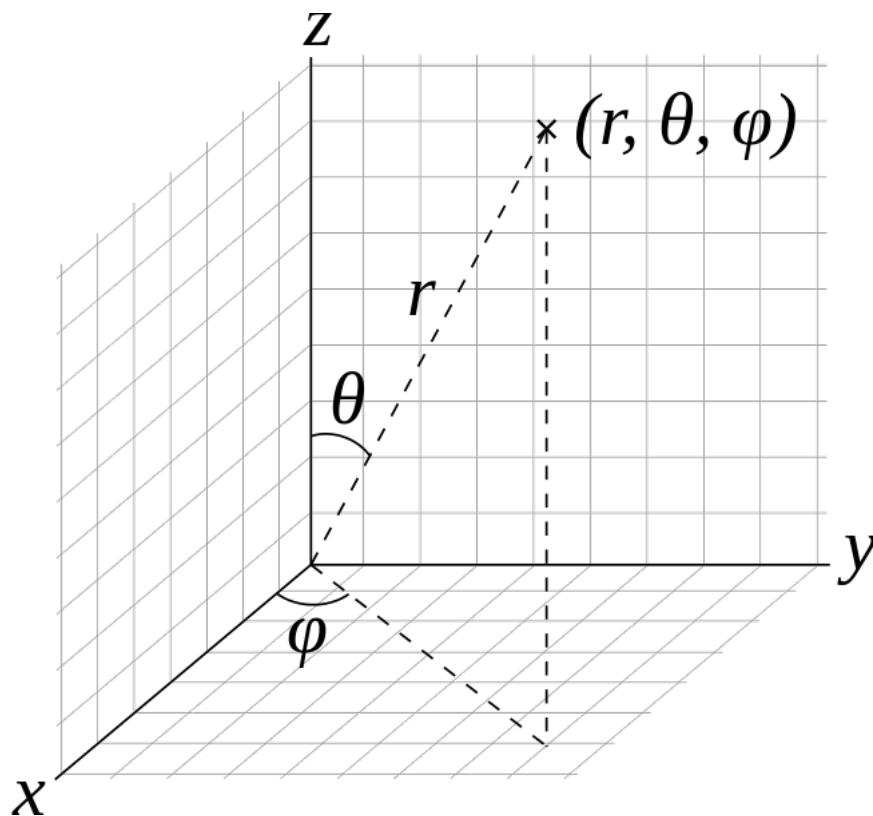
käytetään ensimmäistä merkintätapaa, mutta kulmien kanssa tulee olla aina tarkkana kun etsii tietoa eri lähteistä.

Koordinaattimuunnos pallokoordinaateista karteesisiin saadaan seuraavasti:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.23)$$

Vastaavasti käänteismuunnos karteesisista koordinaateista pallokoordinaatteihin saadaan

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.24)$$



Kuva 1.17: Pallokoordinaatistossa paikka määräytyy kahdella kulmalla ja etäisyydellä keskipisteestä.

Luku 2

Kompleksiluvut

Kompleksilukujen joukko on reaalilukujen joukon laajennos. Kompleksilukujen tarve nousi jo 1500-luvulla, kun kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavoja yritettiin löytää. Italialaismatemaatikko *Girolamo Cardano* julkaisi kaavat kirjassaan *Ars Magna*. Jos kolmannen asteen yhtälöllä on kolme nollasta poikkeavaa ratkaisua, päädytään ratkaisukaavan johdossa väistämättä tilanteeseen, jossa negatiivisesta luvusta joudutaan ottamaan neliöjuuri. Cardano laski kirjassaan, aivan oikein, tulon

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15}\sqrt{-15} = 25 + 15 = 40.$$

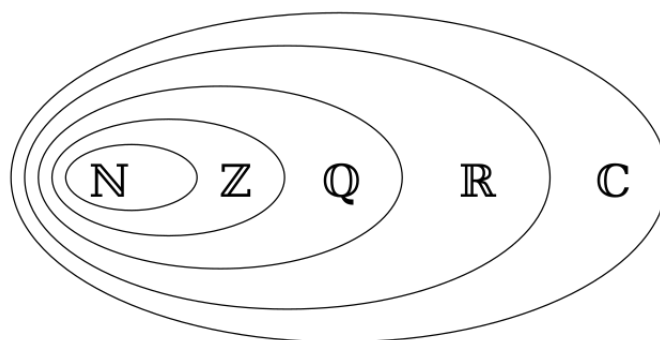
Lopputulos on reaaliluku 40, mutta välissä esiintyy negatiivisia lukuja juurten alla. Cardano kutsui lukuja latinaksi *numeri ficti*, eli kuvitteellisiksi luvuiksi.

Cardanon aikaan edes negatiiviset luvut eivät olleet vielä kovin suosittuja, eikä kompleksilukuja pidetty alkuun missään määrin merkittävänä. René Descartes kutsui lukuja imaginaarisiksi, eikä niillä nähty olevan mitään merkittävää käyttöä, muuten kuin työkaluna tai välivaiheena. 1700-luvulla kompleksilukujen tutkimus kuitenkin edistyi eritoten Eulerin ja de Moivre'n töiden kautta, vaikka niille ei vielä merkittäviä sovelluskohteita ollutkaan. 1800-luvun edetessä fyysikot alkoivat lopulta tarttua kompleksilukuihin ja niitä hyödynnetäänkin hyvin monella fysiikan alalla, kuten virtausmekaniikassa, sähkömagnetismin teoriassa ja ennen kaikkea kvanttimekaniikassa. Kvanttimekaniikassa kompleksiluvut ovat välttämättömiä, ja vaikuttaakin siltä, että ne ovat jollain syvällisellä tavalla osana luonnonlakeja. Suuria yhtenäisteorioita etsiessä on väläytelty myös **kvaternioiden** ja **oktonioiden** liittyvän fysiikan perusteorioiden rakenteisiin.

2.1 Lukujoukot

Lukujoukot ovat kehittyneet aikojen saatossa ja niitä on laajennettu sitä mukaa kun tarve niille on kasvanut joko käytännön elämässä, tai matematiikan piirissä. Joukkoa sanotaan suljetuksi jonkin operaation suhteen, mikäli operaation tuloksena saatava luku kuuluu lukujoukkoon.

1. Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ovat yksinkertaisin yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen suljettu lukujoukko, jolla voidaan kuvata asioiden lukumäärää.
2. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ laajentaa luonnollisiin lukuihin mukaan myös negatiiviset luvut. Kokonaislukujen joukko on suljettu yhteenlaskun ja kertolaskun lisäksi myös vähennyslaskun suhteen.
3. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, \text{ missä } m, n \in \mathbb{Z}\}$, eli murtolukujen joukko on suljettu myös jakolaskun suhteen (poislukien nollalla jakaminen).
4. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ lisää rationaalilukuihin *irrationaaliluvut*, eli luvut joita ei voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä, esimerkiksi 1×1 -kokoisen neliön lävistäjän pituus $\sqrt{2}$. Reaalilukujen mukaan ottaminen ei lisää uusia laskutoimituksia, mutta reaalilukujen joukko toteuttaa *täydellisyysaksiooman*, joka vapaasti suomennettuna tarkoittaa sitä, että reaalilukusuorassa ei ole aukkoja.
5. Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ laajentaa reaalilukujen joukon *kaksiulotteiseksi*, siten että polynomiyhtälöllä on aina astelukunsa verran ratkaisuja.



Kuva 2.1: Lukujoukot ovat toistensa osajoukkoja.

2.2 Kompleksilukujen joukko

Tarkastellaan yksinkertaista polynomiyhtälöä $x^2 + 1 = 0$. Reaalilukua x , joka toteuttaa yhtälön, ei ole olemassa. Ratkaisu etenee kohtaan, jossa juuren alle jää negatiivinen luku.

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 0 \\x^2 &= -1 \\x &= \pm\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Kompleksilukujen joukossa ratkaisu kuitenkin on olemassa! Tehdään lukujoukon laajennus *imaginaariyksikön* i (insinööritieteissä joskus j) avulla. Määritellään

$$i^2 \equiv -1. \quad (2.1)$$

Valitaan kaksi muuttujaa $x \in \mathbb{R}$ ja $z \in \mathbb{C}$. Reaaliluku yhtälöllä ei siis ratkaisua ole, mutta kompleksiyhtälöllä

$$z^2 = -1 \quad (2.2)$$

on ratkaisu

$$z = \pm\sqrt{-1} = \pm i. \quad (2.3)$$

Muuttujien nimeäminen on tietysti vapaata, kuten aina, mutta yleisen käytännön mukaan reaalimuuttujaa merkitään lähtökohtaisesti x ja kompleksimuuttujaa z .

Kaikki kompleksiluvut voidaan esittää kahden reaaliluvun a ja b avulla muodossa

$$z = a + ib. \quad (2.4)$$

Lukua a kutsutaan luvun z *reaaliosaksi* ja lukua b *imaginaariosaksi*.

Huomautus 5. Kompleksilukujen laskutoimitukset muistuttavat huomattavan paljon kaksiulotteisten vektorien laskutoimituksia! Reaaliosa on kuin x -komponentti ja imaginaariosa kuin y -komponentti.

Esimerkki 6. Ratkaise toisen asteen yhtälö $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ z &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ z &= \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} \\ z &= \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ z &= -1 \pm 2i \end{aligned}$$

Reaalilukujen joukossa ratkaisuja ei siis ole, mutta kompleksilukujen joukossa niitä on kaksi: $-1 + 2i$ ja $-1 - 2i$.

2.2.1 Kompleksilukujen laskutoimitukset

Kompleksiluvuilla laskettaessa noudatetaan reaaliluvuista tuttuja laskusääntöjä, mutta jos laskuihin ilmestyy imaginaariyksikön neliö i^2 sen voi korvata luvulla -1. Olkoon kompleksiluvut $z = a + bi$ ja $w = c + di$. Laskutoimitukset lukujen välillä määritellään seuraavasti:

- Yhteenlasku

$$z + w = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

- Vähennyslasku

$$z - w = a + bi - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$$

- Kertolasku

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

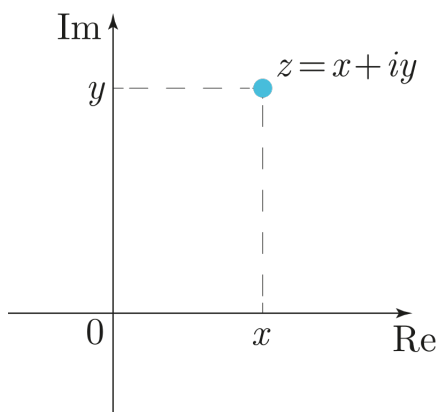
- Jakolasku harjoitustehtävänä.

Erityisesti kerto- ja jakolasku kannattaa suorittaa tapauskohtaisesti, eikä kaavoja käyttäen. Liitântä- ja vaihdantalaki ovat voimassa sekä yhteen- että kertolaskun suhteen myös kompleksiluvuilla laskiessa. Olkoon kompleksiluvut z_1 , z_2 ja z_3 . Tällöin

- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (Liitântälaki yhteenlaskun suhteen)
- $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (Liitântälaki kertolaskun suhteen)
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (Vaihdantalaki yhteenlaskun suhteen)
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (Vaihdantalaki kertolaskun suhteen).

2.2.2 Kompleksilukujen graafinen esitys

Reaalilukuja visualisoidaan yksiulotteisella lukusuoralla. Kompleksiluvuissa on kaksi osaa, reaaliosa ja imaginaariosa, joten niitä voidaan visualisoida *kompleksitasossa*. Kompleksitaso muistuttaa tavallista xy -koordinaatistoa, mutta x -akselilla esitetään reaaliosa ja y -akselilla kompleksiosa.



Kuva 2.2: Kompleksiluvut muodostavat kaksiulotteisen tason. Kaikki reaaliluvut löytyvät reaaliakselilta.

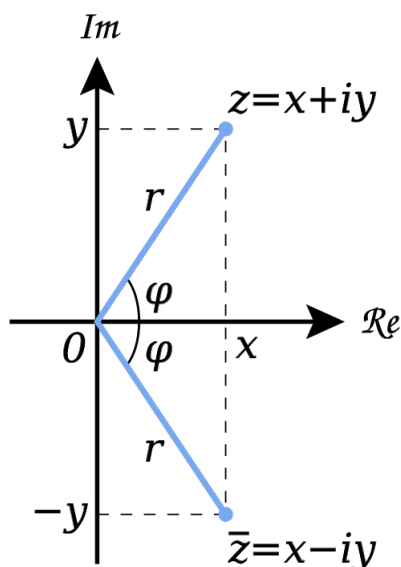
Kompleksiluvut muistuttavatkin hyvin paljon kaksiulotteisia vektoreita, sillä molemmat voidaan ajatella kaksiulotteisen tason pisteinä. Kompleksiluvut ovat kuitenkin oma matemaattinen rakenteensa, sillä vektoreille ei esimerkiksi ole määritelty jakolaskua.

Graafinen esitys havainnollistaa kätevästi esimerkiksi kompleksilukujen itseisarvoja. Kompleksiluvun itseisarvo on kompleksitason pisteen etäisyys origosta. Se lasketaan samaan tapaan kuin vektorin pituus, eli Pythagoraan lausetta hyödyntäen. Kompleksiluvun $z = a + bi$ itseisarvo on

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2.5)$$

2.2.3 Liittoluku eli kompleksikonjugaatti

Kompleksianalyysissä vastaan tulee usein *liittoluvun* käsite. Fysiikassa käytetään tosin useammin termiä *kompleksikonjugaatti*. Kompleksikonjugaatti on kompleksiluvun peilikuva reaaliakselin suhteen.



Kuva 2.3: Kompleksikonjugaatti on luvun peilikuva reaaliakselin suhteen.

Luvun z liittolukua merkitään joko vektoriviivalla $\bar{z}$ tai tähdellä z^* . Fysiikassa tyypillisempi merkintä on z^* , jolloin ilmeistä sekaannuksen vaaraa vektoreihin ei ole. Kompleksikonjugaatti saadaan muuttamalla imaginaariosan merkki. Luvun $z = a + ib$ kompleksikonjugaatti on siis

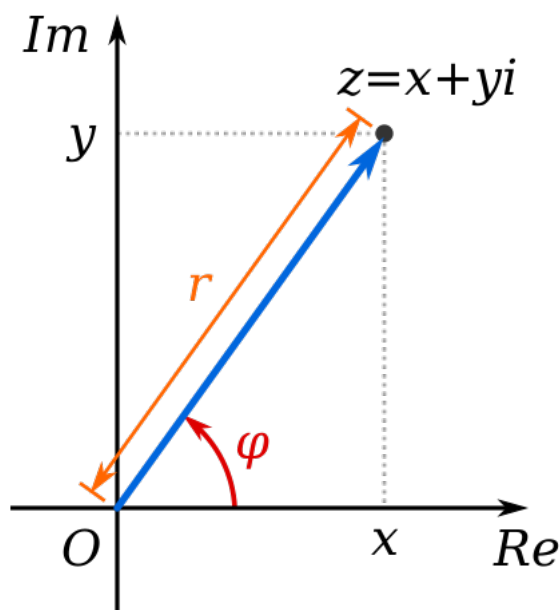
$$z^* = a - bi. \quad (2.6)$$

Kompleksikonjugaateille pätee joitain kiinnostavia tuloksia.

- $z + z^* = 2\operatorname{Re}(z)$
- $(z + w)^* = z^* + w^*$
- $(z - w)^* = z^* - w^*$
- $(zw)^* = z^*w^*$
- $\left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}$

2.2.4 Napakoordinaattiesitys

Koska kompleksiluvun voi esittää koordinaatistossa, voi esitykselle tehdä myös koordinaattimuunnoksen. Napakoordinaattiesityksessä reaali- ja imaginaariosan kertoimet korvataan kompleksiluvun itseisarvolla $|z| = r$ (vrt. paikkavektorin pituus) ja suuntakulmalla φ .



Kuva 2.4: Kompleksiluvun voi esittää napakoordinaatistossa.

Kompleksiluvun napakoordinaattiesitys saadaan, vastaavasti kuin pisteen (x,y) koordinaatin muunnos edeltävässä luvussa.

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Trigonometristen funktioiden avulla voidaan todeta, että

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \tag{2.8}$$

Napakoordinaattiesitykseksi saadaan siten

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \tag{2.9}$$

Huomautus 6. Eulerin lause

Tässä vaiheessa otetaan erikseen perustelematta käyttöön Eulerin lause:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (2.10)$$

Eulerin lauseen avulla kompleksiluvun napakoordinaattiesitykseksi saadaan

$$z = re^{i\varphi}. \quad (2.11)$$

Kompleksikonjugaatin kulma on kompleksiluvun kulman vastakulma, joten kompleksikonjugaatin napakoordinaattiesitys on

$$z^* = e^{-i\varphi}. \quad (2.12)$$

Napakoordinaattiesitys tarjoaa esimerkiksi kätevän tavan kompleksilukujen potenssien laskemiseen. Tätä varten tarvitsemme De Moivren kaavaa.

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad (2.13)$$

Luvun $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ n :s potenssi on siten

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (2.14)$$

Luku 3

Funktiot, derivaatta ja integraali

Derivaatta on eräs keskeinen fysiikan työkalu, sillä erilaisten asioiden muutosnopeudet ovat fysiikassa usein kiinnostavia. On selvää, että esimerkiksi liikkeen tarkastelussa nopeus kuvaa paikan muutosta, eli derivaattaa, ja kiihtyvyys taas nopeuden muutosta. Derivaatalla on kuitenkin merkittävä rooli myös monissa muissa aiheissa, esimerkiksi sähkövirran määritelmässä, indusoituvan jännitteen määrässä tai radioaktiivista hajoamista kuvaavan hajoamislain kanssa.

3.1 Funktiot fysiikassa

Newton kuvasi kappaleen liikettä ajassa. Matemaattisen funktion käsite on peräisin samoilta ajoilta, ja sitä käytti ensimmäisenä saksalaismatemaatikko Gottfried Leibniz vuonna 1694. Fysiikassa tämä alkuperäinen funktion käsittely laskulausekkeena yleensä riittää varsin hyvin, vaikkakin 1700-luvulla Leonhard Euler laajensi käsitteen käsittelemään mitä tahansa lukujen välistä relaatiota ja 1837 saksalainen Gustav Lejeune Dirichlet esitteli nykyisen kaltaisen funktiokäsityksen, joka ei ole sidottu pelkästään laskutoimituksiin.

Fysiikassa funktiot ovat usein ajan funktioita. Tämä ei kuitenkaan ole missään nimessä väistämätöntä, vaan funktioita voidaan määritellä useiden eri muuttujien suhteen. Kappaleen nopeuden voi usein esimerkiksi ilmoittaa sekä paikan, että ajan funktiona.

Esimerkki 7. Useimmiten liikkeen kuvauksessa pyritään tasaisen tai tasaisesti kiihtyvän liikkeen malleihin, mutta toisinaan ovat monimutkaisemmat mallit tarpeen. Jos tunnetaan nopeuden riippuvuus paikasta funktiona, ja paikan riippuvuus ajasta saadaan nopeuden lauseke sisäfunktion käsitteen

avulla:

$$v(s) = s^2 + 3s - 2$$

$$s(t) = 2t - 3$$

$$v(t) = (2t - 3)^2 + 3(2t - 3) - 2 = 4t^2 - 6t - 2$$

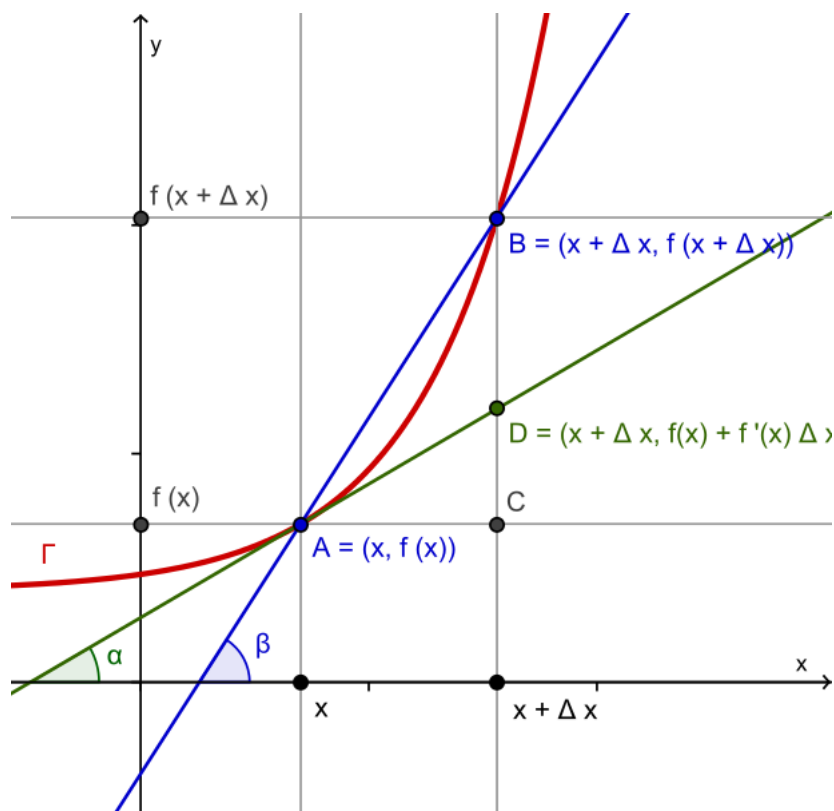
Kuten edellisessä luvussa todettiin, fysiikan suureet ovat usein vektorisuurteita. Tämä ei sinänsä häiritse lainkaan, sillä funktiot voivat olla vektoriarvoisia ja ottaa vektoreita argumenteikseen. Matematiikassa mukaan otettaisiin lähtö- ja maalijoukkojen käsitteet siten, että esimerkiksi kolmiulotteisia vektoreita käsittelevä funktio olisi määritelty $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Fysiikassa näistä joukoista ei niinkään usein murehdita, mutta ne on hyvä pitää taustalla mielessä. Esimerkiksi vinossa heittoliikkeessä olevan kappaleen paikkavektori muuttuu eri tavoin vaaka- ja pystysuunnassa. Usein komponenttiyhtälöt on tapana kirjoittaa erikseen, mutta mikään ei estä meitä kirjoittamassa sitä vektorimuodossa:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t)\hat{i} + (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j}$$

3.2 Derivaatta

Derivaatta kuvaa muutosta. Usein suureiden muutokset ovat kiinnostavia suureita itsessään, joten suureiden välisiä yhteyksiä määritellään usein derivaatan kautta. Lisäksi monet todellisen maailman ongelmat ovat varsin monimutkaisia, eivätkä niiden mallintamiseen riitä yksinkertaiset funktiot, vaan käyttöön tarvitaan *differentiaaliyhtälöitä*. Differentiaaliyhtälöt ovat yhtälöitä, joissa on mukana jokin tuntematon funktio, sekä sen derivaattoja. Ratkaisuna saadaan selville tämä funktio. Kerrataan seuraavaksi hieman derivaattaa ja paneudeutaan differentiaaliyhtälöihin hieman myöhemmin.

Derivaatan tarkkaan matemaattiseen määrittelyyn voi tutustua pitkän matematiikan syventävän kurssin [Derivaatta II-materiaalista](#). Fysiikassa riittää yleensä se, että osaa derivoida funktioita sekä ymmärtää mitä derivaatta merkitsee. Derivaatta tarkoittaa muutosnopeutta, mikä graafisessa tarkastelussa on käyrälle piirretyn tangentin kulmakerroin. Mikäli käyrä kuvaa esimerkiksi kappaleen paikkaa, kertoo käyrälle piirretty tangentti, mihin suuntaan kappale kulkisi, mikäli se jatkaisi täsmälleen sen hetkellä nopeudellaan kyseisestä kohdasta eteenpäin. Graafista derivaattaa tarvitaan etenkin, kun funktion tarkkaa muotoa ei tunneta. Mittausdatassa on usein niin paljon epätarkkuutta, että käsin tehty sovitus kuvaa tilannetta hyvin, jolloin



Kuva 3.1: Sekantti kuvaa keskimääräistä muutosta välillä ja tangentti hetkellistä.

muutosnopeutta on helppo arvioida määrittämällä käyrälle piirretyn tangentin kulmakerroin. Tietokoneiden yleistyttyä ja ohjelmien tultua helppokäyttöisemmiksi, on hyvän sovituksen laatiminen nykyisin varsin helppoa suureenkin mittausdataan, joten hyvin monimutkaisellekin datalle saa nykyisin analyyttisen funktion.

3.2.1 Derivointi

Derivoinniksi kutsutaan sitä, että määritetään funktio joka palauttaa jonkin toisen funktion derivaattojen arvoja. Tässä käytetään hyväksi niin sanottua derivaatta-operaattoria, joka muuntaa funktion f derivaatafunktioksi f' . Fysiikassa derivaattaoperaattoria merkataan perinteisesti symbolilla

$$\frac{d}{dx},$$

missä x korvataan aina sillä muuttujalla, jonka suhteen derivointi suoritetaan.

Esimerkki 8. Derivointi

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

Derivaatan määritelmä on erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.1)$$

Raja-arvon käyttö derivaatan laskemiseksi on kuitenkin etenkin fysiikassa yleensä turhaa. Sen sijaan voimme käyttää ja soveltaa derivoimiskaavoja. Erilaisten alkeisfunktioiden derivointiin on useita kaavoja, jotka löytyvät esimerkiksi taulukkokirjasta.

Tärkeimmät yleispätevät derivoimiskaavat seuraavat siitä, että derivointi on lineaarinen operaatio. Se tarkoittaa, että derivoinnin voi suorittaa summattaville termeille erikseen ja kertoimen voi siirtää derivaatan ulkopuolelle. Kaavamuodossa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) &= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \\ \frac{d}{dx}kf(x) &= k\frac{d}{dx}f(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Lisäksi funktioilla on usein sisäfunktioita, minkä johdosta derivoinnin *ketjusääntö* on erityisen tärkeä. Fysiikassa se kirjoitetaan hieman eri muodossa kuin matematiikan tunnilla olemme tottuneet, mutta käyttö on silti samanaista:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}. \quad (3.3)$$

Yhdistetyn funktion derivaatta saadaan siis derivoimalla ulkofunktio sisäfunktion suhteen, sekä kertomalla sitä sisäfunktion derivaatalla. Ketjua voi tarvittaessa jatkaa pidemmällekin.

Lisäksi usein tarvittuja kaavoja ovat tulon derivaatta ja osamäärän derivaatta. Kahden funktion tulo saadaan derivoitua seuraavasti

$$\frac{dfg}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}. \quad (3.4)$$

Osamäärälle pätee

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad (3.5)$$

Derivoinnin voi usein suorittaa useilla eri menetelmillä, jolloin kaikki tavat tuottavat saman tuloksen.

Esimerkki 9. Esimerkiksi rationaalifunktion

$$\frac{2x^3 + 1}{x^2}$$

voi derivoida helposti ainakin kolmella tapaa. Sieventämällä termeittäin:

$$\frac{d}{dx} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = \frac{d}{dx} 2x + \frac{1}{x^2} = 2 - \frac{2}{x^3}$$

Osamäärän derivaatalla:

$$\frac{d}{dx} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = \frac{(6x^2)x^2 - (2x^3 + 1)2x}{x^4} = \frac{2x^4 - 2x}{x^4} = 2 - \frac{2}{x^3}$$

Tulon derivaatalla:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{2x^3 + 1}{x^2} &= \frac{d}{dx} x^{-2}(2x^3 + 1) = (-2x^{-3})(2x^3 + 1) + (x^{-2})(6x^2) \\ &= -4 - \frac{2}{x^3} + 6 = 2 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Huomautus 7. Riippuvat ja riippumattomat muuttujat: Fysiikassa suureiden välillä on tyypillisesti riippuvuus. Matematiikassa sanotaan yleensä, että x on riippumaton (tai vapaa) muuttuja ja y on riippuva muuttuja, ja riippuvuus ilmaistaan funktiolla $y = f(x)$. Usein riippuvuussuhde voidaan määrittää myös siten, että ratkaistaan x y :n suhteen, jolloin riippumattomasta muuttujasta tulee riippuva ja päinvastoin. Fysiikassa todellisuus asettaa usein riippuvuussuhteet määräytyksi. Esimerkiksi aika on yleensä aina riippumaton muuttuja, ja muut muuttujat ilmaistaan ajan funktiona. Erityisesti differentiaaliyhtälöissä, joissa esiintyy jotakin muuttujaa sekä sen derivaattaa, määrätty riippuvuussuhde derivaatan kautta. Muuttuja, jota derivoidaan, on riippuva ja muuttuja jonka suhteen derivoidaan on riippumaton.

3.3 Differentiaaliyhtälöistä ja integroinnista

Integroiminen tarkoittaa derivoinnin käänteistä operaatiota. Tuntemme siis jonkin suureen muutosnopeuden, ja haluamme sen avulla selvittää suureen arvon. Matemaattisesti tuntemme siis funktion derivaattafunktion, ja tehtävänä on selvittää, minkä funktion derivaatta on kyseessä.

Yksinkertainen fysiikan esimerkki on, että tunnetaan kappaleen nopeus

$v(t)$ ja pyritään tämän tiedon avulla selvittämään missä kappale minäkin ajan hetkenä on, eli ratkaistaan funktio $x(t)$. Kyseessä on itseasiassa differentiaaliyhtälö

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad (3.6)$$

Periaatteessa minkä tahansa funktion integrointi on siis differentiaaliyhtälön ratkaisua. Esimerkiksi nopeuden ja paikan tapauksessa:

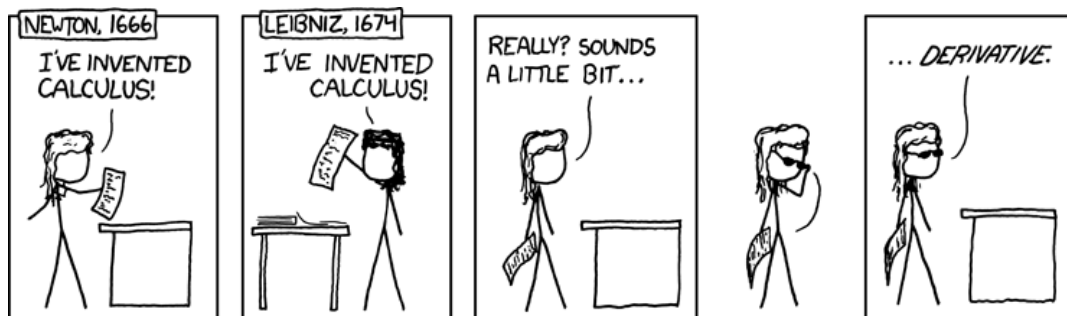
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v(t) \\ dx &= v(t)dt \\ \int dx &= \int v(t)dt \\ x(t) &= \int v(t)dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Yllä olevaa prosessia sanotaan itseasiassa muuttujan erotusmenetelmäksi, eli *separoinniksi*. Siinä differentiaaliyhtälön muuttujat erotetaan yhtälön eri puolille ja integroidaan puolittain. Menetelmään ja muutamiin muihin differentiaaliyhtälöihin palataan hieman myöhemmin.

Heti aluksi on syytä todeta, että yleistä ja suoraviivaista menetelmää integroimiseen ei ole keksitty. Tietyn tyyppiset funktiot on helppo integroida, mutta toisin kuin derivoinnissa, emme useinkaan voi olla varmoja, että funktio on integroituva. Kaikkia tavallisia algebrallisia yhtälöitäkään ei välttämättä voi ratkaista, mutta ratkaisumenetelmien avulla useimmiten nähdään, että ratkaisua ei ole olemassa. Differentiaaliyhtälöiden tapauksessa sen sijaan kiltisti ratkeavia yhtälöitä on verrattain vähän, eikä yhtälöstä usein helpostikaan näe, löytyykö sille ratkaisua vai ei. Differentialilaskennan kehittänyt Isaac Newton olikin tavallaan onnekas, sillä hänen tutkimaansa taivaanmekaniikkaa koskevat differentiaaliyhtälöt kahden kappaleen tapauksessa johtavat helpohkosti ratkeaviin yhtälöihin. Kolmannen kappaleen mukaan tuominen tosin johtaa yhtälöihin, joita ei voi täydellisesti ratkaista.

Huomautus 8. Differentiaali- ja integraalilaskenta keksittiin 1600-luvun loppupuolella erikseen Newtonin ja saksalaisen Gottfried Leibnizin toimesta. Newton kehitti menetelmät pääasiassa fysiikan teorioitaan varten, eikä julkaissut niitä sellaisenaan. Leibniz ehti julkaista oman työnsä aiemmin, ja Newton syyttikin häntä työnsä varastamisesta. Newton epäili, että Leibniz oli päässyt käsiinsä hänen töihinsä hänen jaettua muistiinpanojaan Englannin tiedeakatemia Royal Societyn jäsenten välillä. Vihanpito ja taistelu kesti vuosikausia (jopa satoja), mutta nykyisin, huolellisten muistiinpanojen tutkimi-

sen jälkeen, uskotaan, että molemmat päätyivät lopputulokseen itsenäisesti, Newton derivoinnin kautta ja Leibniz integroinnin kautta. Modernia differentiaalilaskentaa on sittemmin vielä tarkennettu ja paranneltu 1900-luvulla, mutta Leibnizin merkinnät ja termit ovat varsin tarkasti käytössä sellaisenaan vielä tänäkin päivänä.



Kuva 3.2: YEEEEEEAAAAAHHHHHHH!

3.4 Integroimismenetelmiä

Kuten todettu, integrointiin ei ole suoraviivaista menetelmää, joka toimisi aina kaikissa tapauksissa. Ongelmaa voi aina kuitenkin lähestyä käänteisesti: jos keksimme mikä funktio on derivoitu, saamme määritettyä integraalifunktion. *Yritteen* käyttäminen ei differentiaaliyhtälöiden parissa olekaan lainkaan tavatonta.

Palataan tarkastelemaan tilannetta, jossa tunnetaan nopeus ja halutaan ratkaista kappaleen kulkema matka.

$$\frac{dx(t)}{dt} = v$$

Yksinkertaisimmassa tilanteessa kappaleen nopeus v on jokin vakio. Tällöin

$$x'(t) = v = \text{vakio}$$

Derivoinnin kanssa hyvin toimeen tulevat henkilöt aavistavatkin nopeasti miten vakioderivaattaan päästään. Voimme kokeilla yritteitä

$$\begin{aligned} x(t) = \text{vakio} &\rightarrow x'(t) = 0 && \text{ei käy} \\ x(t) = t &\rightarrow x'(t) = 1 && \text{lähempänä} \\ x(t) = vt &\rightarrow x'(t) = v && \text{napakymppi} \end{aligned}$$

Saatiin tuttu kaava matkalle, kun nopeus on vakio v . Kun nyt luulee olevansa valmis, herää seuraava kysymys. Onko olemassa muita funktioita, joiden derivaatta on vakio? Käy ilmi, että niitä on itseasiassa äärettömän monta. Syy tähän on onneksi verrattain yksinkertainen, sillä vakiofunktion derivaatta on nolla. Niinpä funktioon voi integroidessa lisätä minkä tahansa vakion, ja sen derivaatta on edelleen sama. Yllä olevan ongelman *yleiseksi ratkaisuksi* sanotaan lauseketta, jossa on *integroimisvakio* C mukana

$$x(t) = vt + C \tag{3.8}$$

Fysiikassa integroimisvakion rooli on merkittävä, sillä tyypillisesti vain yksi integraalifunktio kuvaa todellista tilannetta. Integroimisvakio on tapana määrittää *alkuehtojen* tai *reunaehtojen* avulla. Esimerkiksi tarkasteltaessa edellistä paikan lauseketta, tiedetään että kappale oli ajan hetkellä $t = 0$ paikassa x_0 . Tällöin

$$x(0) = x_0 = v \cdot 0 + C \Rightarrow x_0 = C,$$

jolloin lopulliseksi paikan lausekkeeksi saadaan

$$x(t) = x_0 + vt, \tag{3.9}$$

missä kaikilla termeillä ja tekijöillä on fysikaalinen merkitys.

Matematiikan kursseilta tuttua integraalilaskennan merkintätapaa käyttäen, alkuperäinen yhtälö voidaan separoida ja laskea seuraavasti.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= v \\ dx &= v dt \\ \int dx &= \int v dt \\ x(t) + C_1 &= vt + C_2\end{aligned}$$

Integroimisvakiot tulevat periaatteessa molemmille puolille yhtälöä, mutta ne voidaan aina yhdistää yhdeksi integroimisvakioksi, tässä tapauksessa: $C = C_2 - C_1 = x_0$, jolloin päästään yhtälön 3.9 mukaiseen lopputulokseen.

3.5 Integroimisniksejä

Integroimiseen ei ole varsinaisia yleisiä menetelmiä, mutta tavallisimpien funktioiden integrointiin löytyy taulukoista näppärät kaavat. Näistä mainittakoon muistutukseksi tavallisten polynomien ja potenssifunktioiden integroinnissa käytetty kaava

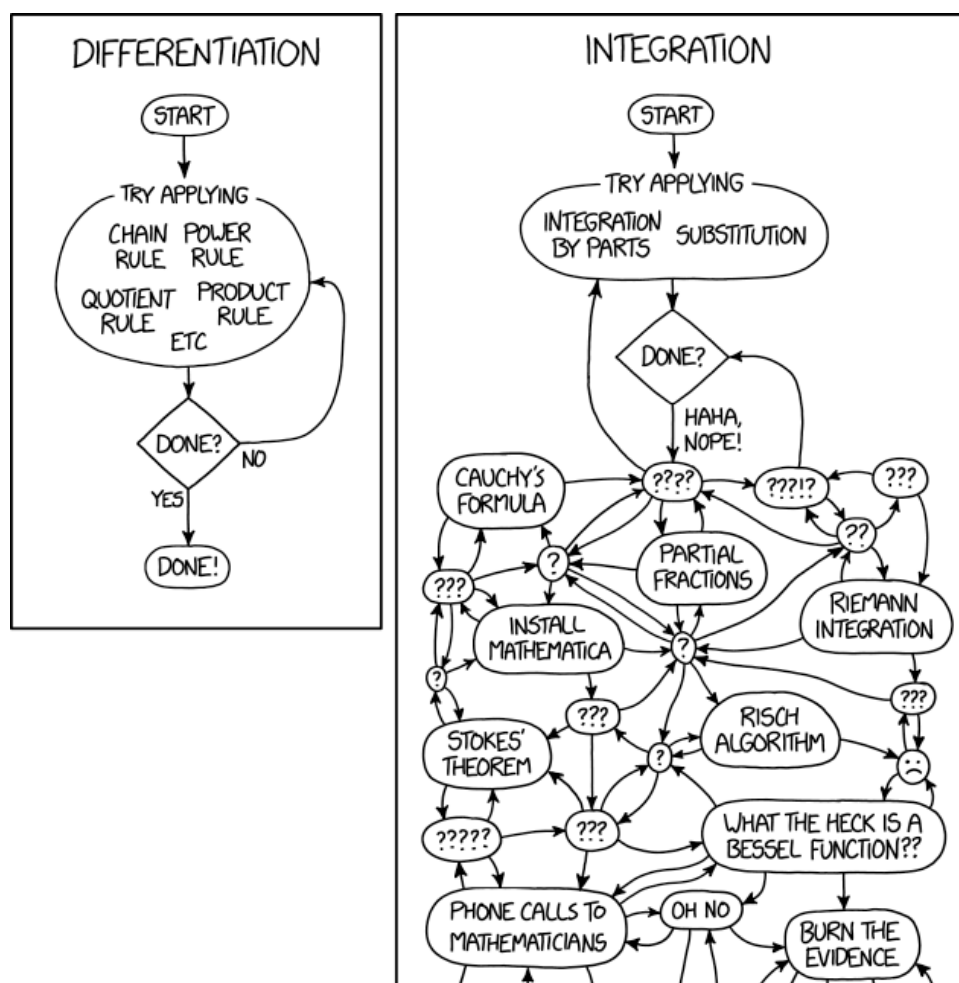
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (3.10)$$

Yksittäisten alkeisfunktioiden integrointi käy helposti kaavoilla, mutta yhdistettyjen funktioiden ja tulo- tai osamäärämuotoisten funktioiden integrointi vaatii usein erinäisten niksien käyttöä, mikäli sekään riittää.

Yleensä integraalien laskeminen on sitä helpompaa, mitä yksinkertaisempiin lausekkeisiin integraalin saa purettua. Tässä muutama integraalin ominaisuus, jotka seuraavat pääasiassa integraalin lineaarisuudesta. Se tarkoittaa sitä, että summan termit voidaan integroida erikseen, ja vakiokertoimen voi ottaa ulos integraalista.

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int k f(x) dx &= k \int f(x) dx,\end{aligned} \quad (3.11)$$

missä $k \in \mathbb{R}$. Eristämällä kertoimet ulos ja integroimalla termeittäin päästään usein jo tilanteeseen, jossa kaikki termit saadaan integroitua suoraan eri kaavoja käyttämällä. Näin ei toki aina ole, ja sen vuoksi usein tarvitaankin esimerkiksi seuraavia kikkoja.



Kuva 3.3: Derivoinnin ja integroinnin eroja.

3.5.1 Sijoitusintegraali

Sisäfunktioillisten funktioiden integrointi onnistuu, mikäli ulkofunktion kerrotimeksi on sisäfunktion derivaatta. Matematiikan tunnilla olemme oppineet kaavan

$$\int s'(x)u(s(x))dx = U(s(x)) + C \quad (3.12)$$

Kaava on aivan toimiva, mutta toinen tapa laskea sisäkkäisten funktioiden integraaleja on käyttää sijoitusmenetelmää. Menetelmässä tehdään muuttujan vaihto, jonka ansiosta integroiminen helpottuu huomattavasti. Käydään seuraavaksi menetelmä läpi esimerkin avulla, sillä sen teoreettinen johto ei ole tässä juuri hyödyksi.

Lähdetään laskemaan integraalia

$$\int (2x + 3)^2 dx \quad (3.13)$$

Tehdään muuttujan vaihto merkitsemällä $t = 2x + 3$. Ensimmäiseksi tulee mieleen, että nythän integrointi on helppoa, sillä sijoituksen jälkeen olisi hyvin helppoa laskea integraali $\int t^2 dt$. Aivan näin suoraviivaisesti emme voi kuitenkaan edetä, sillä integraalissa mukana olevat differentiaalit dx ja dt eivät muutu suoraan toisikseen, vaan nekin täytyy vaihtaa. Differentiaalit saadaan vaihdettua derivaatan avulla. Nyt huomaamme, että t :n derivaatta x :n suhteen on

$$\frac{dt}{dx} = 2,$$

mistä voimme ratkaista kertomalla puolittain dx :llä, että

$$dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

Näin integraali muuttuu muotoon, jossa se on helppo laskea:

$$\int (2x + 3)^2 dx = \int \frac{t^2}{2} dt = \frac{t^3}{6} + C = \frac{(2x + 3)^3}{6} + C$$

Samaan lopputulokseen päästään luonnollisesti myös avaamalla sulkeet ja integroimalla termeittäin, mutta tuloksena on useimmiten hyvin erinäköinen lauseke. Eri menetelmät johtavatkin usein yhtäpitävään, mutta hieman erinäköiseen lopputulokseen. Sijoitusintegroinnin prosessi etenee siis kutakuinkin seuraavasti:

1. Päättele muuttujan vaihto. Useimmiten sopiva muuttuja on lausekkeessa esiintyvä selkeä sisäfunktio.
2. Ratkaise differentiaali uuden muuttujan derivaatasta alkuperäisen suhteen.
3. Sijoita integraaliin uusi muuttuja ja differentiaali ja laske.
4. Sijoita alkuperäinen muuttuja takaisin lausekkeeseen.

Sopivan muuttujan vaihdon keksiminen ei suinkaan ole aina aivan ilmi selvää, minkä vuoksi sujuva integrointi vaatiikin hyvin pitkällistä harjoittelua! Sijoitusintegrointi ei myöskään sovellu aivan kaikkiin tilanteisiin, mutta usein sopiva sijoitus antaa mahdollisuuden monimutkaistenkin lausekkeiden integroimiseen. Seuraava esimerkki toimikoon vielä apuna.

Esimerkki 10. Lasketaan integraali

$$\int \frac{x}{3x^2 + 4} dx$$

Tehdään sijoitus $t = 3x^2 + 4$ ja lasketaan differentiaali:

$$\frac{dt}{dx} = 6x \Rightarrow dt = 6x dx$$

Tällä kertaa differentiaaliin jäi vielä muuttujaa mukaan. Ongelmasta päästään, kun etsitään integroitavasta funktiosta sopiva lauseke. Havaitaan, että $x dx = \frac{dt}{6}$. Näin integraali saadaan sijoitettavaan muotoon:

$$\int \frac{x dx}{3x^2 + 4} = \int \frac{dt}{6t} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t},$$

joka voidaan helposti laskea taulukkokirjasta löytyvän funktion $\frac{1}{x}$ integraalin avulla ja saadaan:

$$\frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \ln t + C = \frac{\ln(3x^2 + 4)}{6} + C$$

3.5.2 Osittaisintegrointi

Tulomuotoisten lausekkeiden integrointi voi onnistua kätevästi osittaisintegroinnin avulla. Osittaisintegrointi toimii, mikäli tulomuotoinen lauseke koostuu osista, joista toinen derivoituu lopulta nollaan. Esimerkiksi jos lausekkeessa muuttuja kertoo trigonometristä funktiota tai eksponenttifunktiota, osittaisintegroinnin käyttö onnistuu hyvin. Osittaisintegrointi voidaan johtaa tulon derivaatan avulla, ja lopulta päädytään kaavaan:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (3.14)$$

Kaavan idea on siinä, että vain toinen tulon tekijöistä täytyy integroida, ja toiselle riittää derivointi. Jäljelle jää edelleen integraali, mutta se saattaa olla alkuperäistä helpompi laskea. Toisinaan voi olla, että jäljelle jäävä integraali täytyy osittaisintegroida uudelleen, mutta mikäli derivoitavan osan asteluku laskee joka kierroksella, päättyy osittaisintegroitiketju lopulta. Osittaisintegroidessa tulee olla tarkkana, miten termit valitsee. Esimerkki havainnollistakoon.

Esimerkki 11. Lasketaan integraali

$$\int x e^x dx$$

Integroitavaksi kannattaa yleensä valita ”hankalampi” funktio, joten valitaan

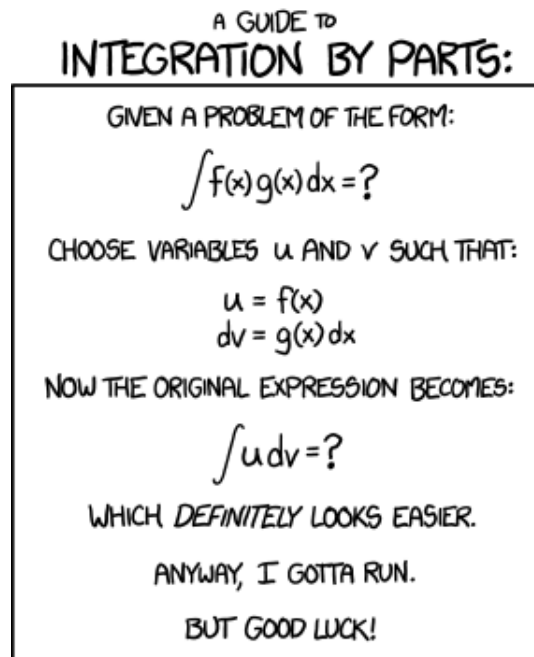
$$g'(x) = e^x,$$

jolloin

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int e^x dx = e^x.$$

Tämän tämän jälkeen riittää toisen termin derivointi, eli olkoon $f(x) = x$ ja $f'(x) = 1$. Nyt voimme sijoittaa termit paikalleen kaavan 3.14 mukaisesti

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$



Kuva 3.4: Osittaisintegrointi ei välttämättä tee hullua hurskaammaksi.

Joskus osittaisintegrointi saattaa myös johtaa tilanteeseen, jossa alkuperäinen integraali voidaan ratkaista syntyneestä yhtälöstä. Tällöin osittaisintegroinnin tuloksena jäävä integraali on sama kuin alkuperäinen ja voi-

daan siirtää yhtälön vasemmalle puolelle. Näin voidaan integroida esimerkiksi funktio $f(x) = x^2 e^x$, mutta jätetään se harjoitustehtäväksi!

3.6 Fysiikan sovelluksia

Käsitellään seuraavaksi muutamia tilanteita, joissa integraalilaskentaa voidaan hyödyntää fysiikan tilanteissa.

3.6.1 Työ ja energia

Vakiovoiman kappaleeseen tekemä työ on määritelty peruskursseilta tuttuun tapaan voiman ja kappaleen siirtymän tulona

$$W = Fs. \quad (3.15)$$

Tämä määritelmä on kuitenkin varsin karkea, sillä ensimmäiseksi on huomioitava, että ainoastaan voiman siirtymän suuntainen komponentti tekee työtä. Kaava 3.15 pätee siis ainoastaan kun voima ja siirtymä ovat yhden-suuntaisia. Määritelmästä saadaan yleisempi käsittelemällä voima ja siirtymä vektoreina, jolloin työ saadaan näiden välisenä pistetulona:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (3.16)$$

Usein tämä on helppoa kirjoittaa skalaarimuodossa

$$W = Fs \cos \alpha, \quad (3.17)$$

missä α on voiman ja siirtymän välinen kulma.

Toinen ongelma määritelmässä on, että se kattaa ainoastaan vakiovoimat. Kun voima muuttuu matkan aikana, muuttuu myös voiman tekemä työ. Yleistääksemme tarkastelua, oletetaan että voima on jokin siirtymän funktio $F = F(s)$. Pääsemme hyödyntämään integraalilaskentaa, kun siirrymme tarkastelemaan voiman tekemää työtä *infinitesimaalisella* välillä ds . Tämä tarkoittaa sitä, että tarkastelemme niin lyhyttä siirtymää, että voimme pitää voimaa vakiona kyseisen siirtymän aikana. Tällöin kuljettaessa infinitesimaalinen siirtymä ds tehdään infinitesimaalinen työ

$$dW = Fds. \quad (3.18)$$

Kokonaistyön saamme nyt laskemalla kaikki infinitesimaaliset työt yhteen, eli integroimalla

$$W = \int dW = \int_0^{s_1} F(s)ds. \quad (3.19)$$

Laskussa käytämme määrättyä integraalia, sillä siirtymä alkaa nolasta, ja päättyy johonkin arvoon s_1 , joka riippuu tilanteesta. Näin määritämme samalla käyrän $F(s)$ jälle jäävän pinta-alan.

Esimerkki 12. Lasketaan vanha tuttu vakiovoiman $F = 5 \text{ N}$ tekemä työ, kun kappale siirtyy 3 m.

$$W = \int_0^3 F ds = \int_0^3 5 \text{ N} ds = 5 \text{ N} \Big/_0^3 s = 5 \text{ N}(3 \text{ m} - 0 \text{ m}) = 15 \text{ J}$$

3.6.2 Laajenevan kaasun tekemä työ

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi sylinteriä, jonka mäntä voi liikkua kitkattomasti. Kun sylinterissä oleva molekyyli törmää mäntään, se aiheuttaa voiman mäntään, ja tällaiset törmäykset aiheuttavat paineen sylinterin sisälle. Olkoon männän pinta-ala A ja sylinterissä kaasua, joka aiheuttaa paineen p . Kaasun mäntään aiheuttama voima on

$$F = pA. \quad (3.20)$$

Kun mäntä liikkuu pienen matkan dx , voima tekee työn

$$dW = Fdx = pAdx. \quad (3.21)$$

Sylinterin pinta-alan A ja matkan dx tulo antaa tilavuuden muutoksen,

$$Adx = dV \quad (3.22)$$

joten työ voidaan esittää muodossa

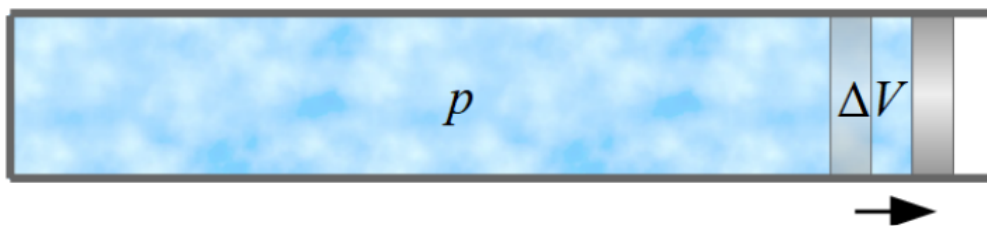
$$dW = pdV. \quad (3.23)$$

Äärellisessä muutoksessa tämä voidaan integroida ja kun kaasu laajenee tilavuudesta V_1 tilavuuteen V_2 , tehty työ on

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (3.24)$$

Jotta ylläoleva integraali voidaan laskea, pitää tietää paineen riippuvuus tilavuudesta. Tässä auttaa usein esimerkiksi ideaalikaasun tilanyhtälö.

Huomaa, että mikäli lopputilavuus on pienempi kuin alkutilavuus, tulee työstä erimerkkinen! Tämä tarkoittaa sitä, että kaasuun tehdään työtä, eli sitä puristetaan kasaan, jolloin sen sisäenergia kasvaa.



Kuva 3.5: Tilavuuden muutos riippuu männän pinta-alasta ja liikkumasta matkasta.

Luku 4

Differentiaaliyhtälöitä

Olemme integrointia harjoitellessa periaatteessa ratkaisseet yksinkertaisia differentiaaliyhtälöitä. Tutustutaan seuraavaksi muutamaan menetelmään, joilla tavallisia differentiaaliyhtälöitä ratkaistaan. Yksinkertaisen näköinenkin differentiaaliyhtälö saattaa olla yllättävän hankala ratkaista, mutta tietyn tyyppisiin yhtälöihin löytyy yleisiä ratkaisumenetelmiä. Tarkastelemme tässä *tavallisia differentiaaliyhtälöitä* (ODE, ordinary differential equation), jotka sisältävät vain derivaattoja yhden muuttujan suhteen.

4.1 Separoituvat yhtälöt

Suoraviivaisinta differentiaaliyhtälön

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.1)$$

ratkaiseminen on, mikäli oikean puolen funktio voidaan kirjoittaa tulomuodossa, jossa toinen tekijä riippuu vain muuttujasta x ja toinen muuttujasta y . Tällöin siis

$$\frac{dy}{dx} = q(x)p(y), \quad (4.2)$$

ja sanotaan, että yhtälö on *separoituva*. Yhtälö voidaan ratkaista separoimalla, eli erottamalla muuttujat yhtälön eri puolille. Yhtälö voidaan jakaa puolittain funktiolla $p(y)$ ja kertomalla puolittain differentiaalilla dx . Tämän jälkeen yhtälö on muodossa

$$\frac{dy}{p(y)} = q(x)dx, \quad (4.3)$$

mikä voidaan integroida puolittain ja ratkaista riippumaton muuttuja y . Separoiminen on suoraviivainen menetelmä, mutta muuttujien erottaminen ei

välttämättä ole helppoa. Separoituvista yhtälöistä löytyy tietoa myös kurssin [Derivaatta II](#) materiaalista.

Esimerkki 13. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}.$$

Yhtälö on jo valmiiksi tulomuodossa, joten voimme erottaa muuttujat:

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+3}$$

Integroidaan yhtälö seuraavaksi puolittain. Molempien puolien integraalista tulee luonnollista logaritmia, eli

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+3}$$

$$\ln|y-1| = \ln|x+3| + C$$

Integroimisvakio on tässä tapana yhdistää yhdeksi, ja merkitä vain toiselle puolelle. Korotetaan yhtälö puolittain kantaluvun e mukaiseen potenssiin.

$$e^{\ln|y-1|} = e^{\ln|x+3|+C}$$

$$|y-1| = |x+3|e^C$$

Koska C on vakio, myös e^C on vakio, joten yksinkertaistetaan merkintöjä merkitsemällä $e^C = K$ ja saamme

$$|y-1| = K|x+3|$$

Itseisarvot voivat saada joko positiivisen tai negatiivisen arvon riippuen muuttujien arvoista, joten voimme merkitä

$$y-1 = \pm K|x+3|$$

Koska K voi olla mikä tahansa reaaliluku, ei lausekkeen merkillä ole väliä, ja voimme merkitä tekijän $\pm K$ jälleen symbolilla C ja saamme ratkaisuksi

$$y = 1 + C(x+3).$$

4.1.1 Alkuarvoprobleemat

Fysiikan ongelmat ovat tyypillisesti alkuarvo-tyyppiä. Differentiaaliyhtälöillä on lähtökohtaisesti äärettömän monta ratkaisufunktiota, sillä ne sisältävät jonkinlaisen integroimisvakion. Fysiikassa käytännössä vain yksi näistä funktioista kuvaa tarkasteltavana olevaa tilannetta. Oikea funktio löydetään hyödyntämällä alkuarvoa. Matemaattisesti tämä tarkoittaa jonkin tunnetun pisteen hyödyntämistä. Tiedämme funktion arvon jollain tietyllä muuttujan arvolla, joten voimme muodostaa yhtälön josta integroimisvakion saa ratkaistua.

Alkuarvo on usein pääteltävissä tilanteen perusteella. Tippuvan kappaaleen paikka ja nopeus voivat esimerkiksi olla lähdössä nolliä tai radioaktiivisen aineen aktiivisuus mitataan jollain tunnetulla ajan hetkellä. Sovelletaan edelliseen esimerkkiin alkuehtoa $y(-1) = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} y(-1) &= 1 + C(-1 + 3) = 0 \\ 2C &= -1 \\ C &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Näin sijoittamalla ratkaistu C :n arvo takaisin, saadaan *yleisestä ratkaisusta* $y = 1 + C(x + 3)$, alkuehdot täyttävä *yksittäisratkaisu* $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

4.2 Eksaktit yhtälöt

Kaikki differentiaaliyhtälöt eivät suinkaan ole separoituvia. Toinen erikoistapaus, jossa ratkaisu saadaan algoritmisella prosessilla on *eksaktit yhtälöt*. Tällöin differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

on kirjoitettavissa muodossa

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (4.4)$$

Esimerkiksi yhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 1}$$

voidaan esittää muodossa

$$(3x^2 - y)dx + (1 - x)dy = 0.$$

Tämä ei vielä tee yhtälöstä eksaktia, mutta mikäli on löydettävissä jokin funktio $F(x,y)$, jonka derivaatoille x :n ja y :n suhteen pätee

$$\frac{dF}{dx} = M(x,y) \quad \text{ja} \quad \frac{dF}{dy} = N(x,y), \quad (4.5)$$

on yhtälön vasen puoli 4.4 funktion F kokonaisdifferentiaali

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \quad (4.6)$$

Tällaisen funktion keksiminen ei välttämättä ole kovin helppoa, ja se tuottaakin ratkaisun myös differentiaaliyhtälöön. Eksaktiuden voi onneksi testata erillisellä testillä.

Määritelmä 4.2.1. Eksaktiuden testaaminen

Differentiaaliyhtälö $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ on eksakti jos ja vain jos

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx}. \quad (4.7)$$

Eksakti yhtälö voidaan ratkaista seuraavalla menettelyllä:

1. Koska yhtälö on eksakti, on $M(x,y)$ funktion F derivaatta x :n suhteen. Funktio F on siis muotoa

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \quad (4.8)$$

Eli yhtälön ratkaisu aloitetaan integroimalla funktio M x :n suhteen. Koska integrointi suoritetaan vain muuttujan x suhteen, integroimisvakio voi nyt riippua muuttujasta y , joten lausekkeeseen jää tuntematon y :n funktio $g(y)$.

2. Koska F :llä on lauseke (yhtälö 4.8), voidaan nyt hyödyntää funktioa N , sillä tiedetään että N on F :n derivaatta y :n suhteen. Derivoidaan lauseke 4.8 ja ratkaistaan siitä $g'(y)$.
3. Integroidaan $g'(y)$ ja sijoitetaan se lausekkeeseen 4.8. Näin saadaan selville funktio $F(x,y)$, jonka kokonaisdifferentiaali alkuperäisen yhtälön lauseke on.
4. Yhtälön *implisiittinen ratkaisu* on

$$F(x,y) = C, \quad (4.9)$$

missä C on mielivaltainen vakio.

Implisiittinen ratkaisu tarkoittaa yhtälöä, jossa on yhä sekä muuttujaa x , että muuttujaa y , mutta ei enää derivaattoja. Implisiittisestä ratkaisusta saadaan *eksplisiittinen* ratkaisemalla muuttuja y muuttujan x suhteen tavallisia yhtälön ratkaisumenetelmiä hyödyntäen. Eksplisiittisen ratkaisun saaminen ei aina ole mahdollista analyttisin keinoin, joten usein joudutaan tyytymään ainoastaan implisiittiseen ratkaisuun.

Esimerkki 14. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$(1 + e^x y + x e^x y) dx + (x e^x + 2) dy = 0$$

Nyt $M(x,y) = 1 + e^x y + x e^x y$ ja $N(x,y) = x e^x + 2$. Tarkistetaan, että yhtälö on eksakti:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dy} &= e^x + x e^x \\ \frac{dN}{dx} &= e^x + x e^x\end{aligned}$$

Koska derivaatat ovat samat, on kyseessä eksakti yhtälö. Etsitään funktio F integroimalla M :

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int 1 + e^x y + x e^x y dx + g(y) \\ &= y e^x - y x e^x - y e^x + x + g(y) \\ &= y x e^x + x + g(y)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Derivoidaan saatu lauseke muuttujan y suhteen

$$\frac{dF}{dy} = x e^x + g'(y)$$

Derivaatta y :n suhteen on nyt funktio $N(x,y) = x e^x + 2$, joten voimme ratkaista $g'(y)$:n.

$$x e^x + g'(y) = x e^x + 2 \Leftrightarrow g'(y) = 2$$

Tämä on helppo integroida, joten saamme

$$g(y) = 2y.$$

Näin ollen sijoittamalla $g(y)$ paikoilleen yhtälöön 4.10 saadaan

$$F(x,y) = y x e^x + x + 2y,$$

mistä saamme implisiittisen ratkaisun

$$yxe^x + x + 2y = C$$

Kyseisestä yhtälöstä myös eksplisiittisen ratkaisun saa kohtalaisella vaivalla:

$$y = \frac{C - x}{xe^x + 2}$$

Eksaktin yhtälö on periaatteessa symmetrinen muuttujien x ja y suhteen, joten sen voi ratkaista myös integroimalla aluksi funktio N muuttujan y suhteen, ja ratkaisemalla tuntematon funktio $g(x)$. Joissain tapauksissa tämä voi johtaa yksinkertaisempiin integraaleihin.