

Matemaattisen fysiikan jouluspesiaali: Sarjakehitelmiä



Funktioiden arvojen approksimointi potenssisarjojen avulla on usein kätevää. Fysiikassa eritoten approksimointia pidetään arvossa, ja se tekeekin monesta hankalasta ongelmasta huomattavasti yksinkertaisemman. Eräs paljon käytetty menetelmä on approksimoida funktio potenssisarjana, ja käyttää vain sarjan ensimmäisiä termejä. Taylorin sarjat ovat tapa esittää mikä tahansa funktio *potenssisarjan* avulla.

Riittävän korkean asteluvun polynomilla voi approksimoida mitä tahansa funktioa. Funktion sarjakehitelmässä etsitään polynomi, joka on mahdollisimman lähellä annettua funktioa. Brook Taylor esitti ensimmäisenä tavan esittämiseen potenssisarjan avulla. Hänen kaavansa on:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

missä $f^{(n)}$ tarkoittaa funktion f n :ttä derivaattaa. Sanotaan, että sarja on kehitetty pisteen $x = a$ ympäristössä. Useimmiten tarvitaan, ja tässäkin jatkossa tarkastellaan ensimmäiseen nollan ympäristössä kehitettyä Taylorin sarjaa, ja sitä kutsutaan joskus erityisesti Maclaurinin sarjaksi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Funktioiden approksimoinnissa voi käyttää katkaistua sarjakehitelmää.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Approksimaatio on sitä tarkempi, mitä pienempi x on tai mitä suurempi n on. Yleisessä muodossa tarkkuus on sitä parempi, mitä lähempänä x on kohtaa a .



Kuva 1: Colin Maclaurin

Tehtäviä:

1. Muodosta Maclaurinin polynomin neljä ensimmäistä termiä seuraaville funktioille:
 - (a) $\ln(x + 1)$
 - (b) $\sqrt{x + 1}$
 - (c) $(1 + x)^{-1}$
2. Muodosta Maclaurinin polynomin neljä ensimmäistä termiä funktiolle e^x . Kuinka suuri suhteellinen virhe muodostamallasi polynomilla on kohdassa $x = 2$? Montako termiä potenssisarjaan pitäisi ottaa, että virhe on alle prosentin?
3. Muodosta Taylorin polynomin neljä ensimmäistä termiä funktiolle e^x kohdassa $x = 1$. Kuinka suuri suhteellinen virhe muodostamallasi polynomilla on kohdassa $x = 2$? Montako termiä potenssisarjaan pitäisi ottaa, että virhe on alle prosentin?
4. Muodosta Taylorin polynomin neljä ensimmäistä termiä funktiolle $\sqrt{x + 1}$ kohdassa $x = 1$. Kuinka suuri suhteellinen virhe muodostamallasi polynomilla on kohdassa $x = 2$?
5. Nopeudella v liikkuvan kappaleen relativistinen kineettinen energia on muotoa

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2,$$

missä m_0 on kappaleen lepomassa ja $\beta = \frac{v}{c}$ ja c valonnopeus. Osoita, että pienillä nopeuksilla, eli kun v on huomattavasti pienempi kuin c , kineettinen energia saa klassisen fysiikan muotonsa

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Vinkki: Kehitä funktio $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ sarjaksi ja katkaise se sopivasta kohdasta.

Vastauksia:

1. googleta
2. 14%
3. 1,9%
4. 0,15%
5. osoita