

Laskinohjelmat lukiossa

Ver. 1.0

Peruslaskin Abicus

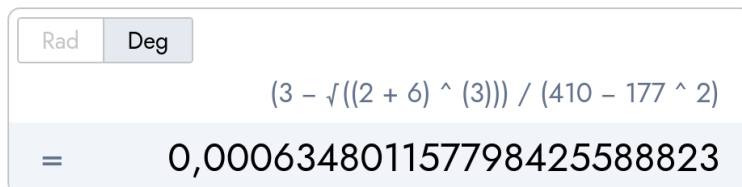
<https://digabi.github.io/abicus/>

Abicus on koejärjestelmä Abittiin suunniteltu ja sitä varten tehty peruslaskin. Se on tarkoituksella toiminnoiltaan erittäin rajoittunut, koska se on suunniteltu matematiikan kokeen A-osiota varten. Laskimella on tarkoitus vain laskea yksinkertaisia laskutoimituksia, joiden laskeminen saattaisi olla päässä liian hankalaa.

Abicus on yksirivinen laskin, joten sulkeita on tärkeää käyttää huolellisesti erityisesti osamäärien ja juurten kanssa.

Esimerkki:

$$\frac{3 - \sqrt{(2 + 6)^3}}{410 - 177^2}$$

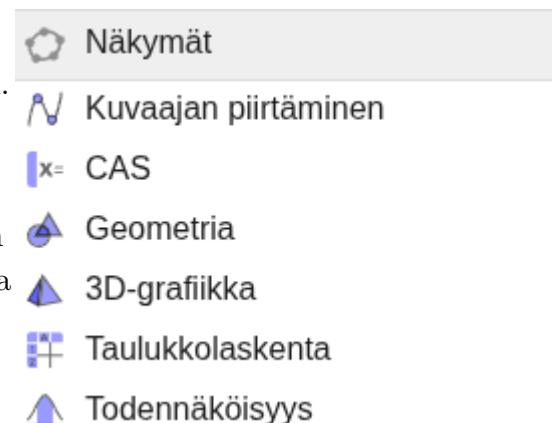


Matematiikkaohjelmisto Geogebra

<https://www.geogebra.org/classic?lang=fi>

Geogebra on monipuolinen matematiikkaohjelmisto, josta löytyy useita tiloja eri käyttötarkoituksia varten. Eri tilat voi valita oikean yläkulman valikosta kohdasta "Näkymät".

Ohjelman kielen, fonttikoon sekä pyöristystarkkuuden voi valita kohdasta "Asetukset". Pyöristystarkkuutena on yleensä oletuksena 2 desimaalia, ja se kannattaa heti vaihtaa esimerkiksi 10 desimaaliin.



CAS-laskin

CAS (Computer Algebra System) on niin sanottu symbolinen laskin, jolla voi laskea tarkoilla arvoilla sekä kirjaimilla. CAS-laskimen käyttö vaatii harjoittelua, koska kyseessä on monipuolinen ohjelmisto. Jos esimerkiksi lasket luvun 8 neliöjuuren tavallisella laskimella, saat likiarvon, mutta jos teet sen CAS-laskimella saat sievennetyn tarkan arvon:

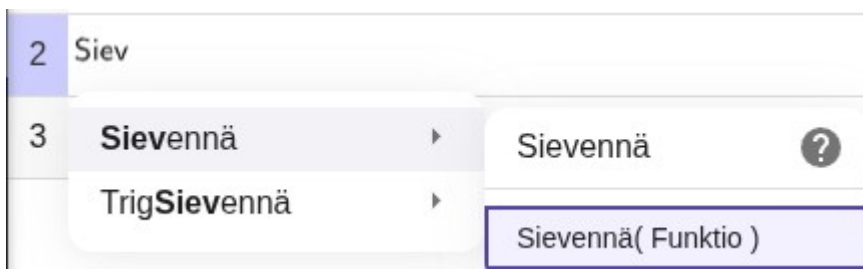


Rad Deg $\sqrt[8]{8}$
= 2,8284271247461900976



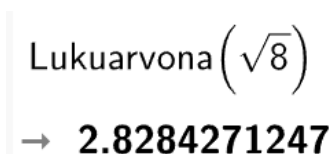
1 $\sqrt{8}$
 $\rightarrow 2\sqrt{2}$

Geogebrian CAS-laskimessa on useita komentoja, joilla voi esimerkiksi ratkaista yhtälöitä tai sieventää lausekkeita. Komentoja täytyy kuitenkin opetella jonkin verran ulkoa, sillä Geogebra näyttää komennon vasta kun sitä ryhtyy kirjoittamaan.



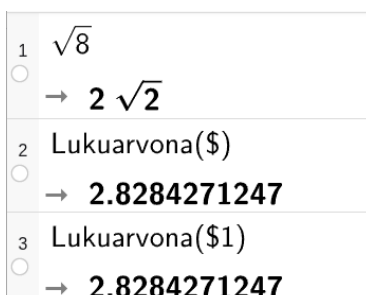
Kun komentoa ryhtyy kirjoittamaan aukeaa lista komennoista, jotka sisältävät kirjoitettua tekstiä. Voit valita halutun komennon listasta hiirellä, tai nuolinäppäimillä ja Enterillä.

Jos CAS-laskimella haluaa saada likiarvon tarkasta arvosta, voi sen tehdä komennolla "Lukuarvona".



Lukuarvona($\sqrt{8}$)
 $\rightarrow 2.8284271247$

Edellisen rivin tulokseen voi myös viitata \$-merkillä. Pitkässä tehtävässä rivejä saattaa kertyä paljon. \$-merkin ja rivinumeron avulla voit viitata minkä tahansa rivin tulokseen:



1 $\sqrt{8}$
 $\rightarrow 2\sqrt{2}$
2 Lukuarvona(\$)
 $\rightarrow 2.8284271247$
3 Lukuarvona(\$1)
 $\rightarrow 2.8284271247$

Tarkkojen arvojen laskeminen luvuilla

CAS-laskin sieventää murtolukujen ja juurten laskut ilman erillisiä komentoja.

1

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7}$$

→
$$\frac{29}{28}$$

2

$$4\sqrt{4 \cdot 15} + 6\sqrt{12}$$

→
$$12\sqrt{3} + 8\sqrt{15}$$

Desimaaliluvun voi muuntaa murtoluvuksi komennolla "Murtoluvuksi".

4

Murtoluvuksi(2.148)

→
$$\frac{537}{250}$$

Muuttujaa sisältävien lausekkeiden sieventäminen

Geogebra sieventää myös muuttujaa sisältäviä lausekkeitä ilman erilliskomentoa varsin sujuvasti. Tietokone ei kuitenkaan aina tiedä, millainen olisi toivottu lopputulos, joten komennoilla **Sievennä**, **JaaTekijöihin** ja **PoistaSulkeet** voi saada erilaisia muotoiluja aikaan. JaaTekijöihin muokkaa lausekkeesta tulomuotoisen jos mahdollista ja PoistaSulkeet vastaavasti pyrkii avaamaan sulkeita niin pitkälle kuin mahdollista. Samasta lausekkeesta voikin eri tavoin sieventämällä saada hieman erinäköisiä lopputuloksia:

3

$$\frac{3x^2 - 4x^3}{2x}$$

→
$$-2x^2 + \frac{3}{2}x$$

4

Sievennä $\left(\frac{3x^2 - 4x^3}{2x}\right)$

→
$$-x \frac{4x - 3}{2}$$

5

JaaTekijöihin $\left(\frac{3x^2 - 4x^3}{2x}\right)$

→
$$\frac{-1}{2}x(4x - 3)$$

4

PoistaSulkeet $((x - 2)(x + 2))$

→
$$x^2 - 4$$

Yhtälöiden ratkaiseminen

Ehkä yleisin CAS-laskimen käyttötarkoitus on yhtälön ratkaiseminen. CAS-laskin osaa ratkaista lähes kaikki tavanomaiset yhtälöt yhdellä napin painalluksella.

Yksinkertaiset yhtälöt, joissa muuttujana on x voidaan ratkaista nappia painamalla. Kirjoita yhtälö ja paina työkalurivin nappia, jossa on punainen yhtäsuuruusmerkki $x:n$ vieressä.

Geogebra interface showing the 'Solve' button (x=) highlighted with a red arrow. Below the toolbar, the equation $3x - 2 = 0$ is entered, and the solution is displayed as Ratkaise: $\left\{x = \frac{2}{3}\right\}$.

Yhtälön ratkaisemista varten on myös komento "Ratkaise".

2

Ratkaise($3x - 2 = 0$)

→ $\left\{x = \frac{2}{3}\right\}$

Ratkaise-komento on tarpeellinen, kun halutaan ratkaista yhtälöstä jotain muuta kuin x . Esimerkiksi fysiikan ja kemian tehtävissä on usein tarpeen ratkaista yhtälöitä symbolisesti, eli niin, että lausekkeessa esiintyy ainoastaan kirjaimia. Halutun muuttujan voi kirjoittaa Ratkaise-komennon sulkeiden sisään pilkulla erotettuna yhtälön jälkeen.

4

Ratkaise($p \cdot V = n \cdot R \cdot T, T$)

→ $\left\{T = V \frac{p}{R n}\right\}$

Huomaa, että muuttujat tulee erottaa kertomerkillä. Geogebra tulkitsee yhteen kirjoitetut kirjaimet yhdeksi muuttujaksi. Voitkin nimetä muuttujasi halutessasi varsin mielikuvituksellisesti.

5

Ratkaise($\text{tapsa} = \frac{\text{kimmo}}{\text{jussi}}, \text{jussi}$)

→ $\left\{\text{jussi} = \frac{\text{kimmo}}{\text{tapsa}}\right\}$

Yhtälöparin tai -ryhmän ratkaiseminen onnistuu myös. Tavalliset yhtälöparit, joissa muuttujana on x ja y , voidaan ratkaista työkalurivin painikkeella. Kirjoita molemmat yhtälöt omille riveilleen, ja valitse molemmat yhtälöt pitämällä CTRL-painiketta pohjassa ja klikkaamalla harmaata aluetta rivinumeron vieressä. Tämän jälkeen voit painaa jälleen työkalurivin nappia, jossa on punainen yhtäsuuruusmerkki $x:n$ vieressä.

$$\begin{array}{l}
 6 \quad 3x + 2y = 4 \\
 \rightarrow \mathbf{3\,x + 2\,y = 4} \\
 7 \quad -2x + 3y = -2 \\
 \rightarrow \mathbf{-2\,x + 3\,y = -2} \\
 \{\$6, \$7\} \\
 8 \quad \text{Ratkaise: } \left\{ \left\{ x = \frac{16}{13}, y = \frac{2}{13} \right\} \right\}
 \end{array}$$

Ratkaise-komennossa yhtälöryhmän yhtälöt syötetään aaltosulkujen sisään, jonka jälkeen pilkulla erotettuna lisätään aaltosulkeisiin lista muuttujista.

$$\begin{array}{l}
 \text{Ratkaise}(\{3x + 2y = 4, -2x + 3y = -2\}, \{x, y\}) \\
 9 \quad \rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{16}{13}, y = \frac{2}{13} \right\} \right\}
 \end{array}$$

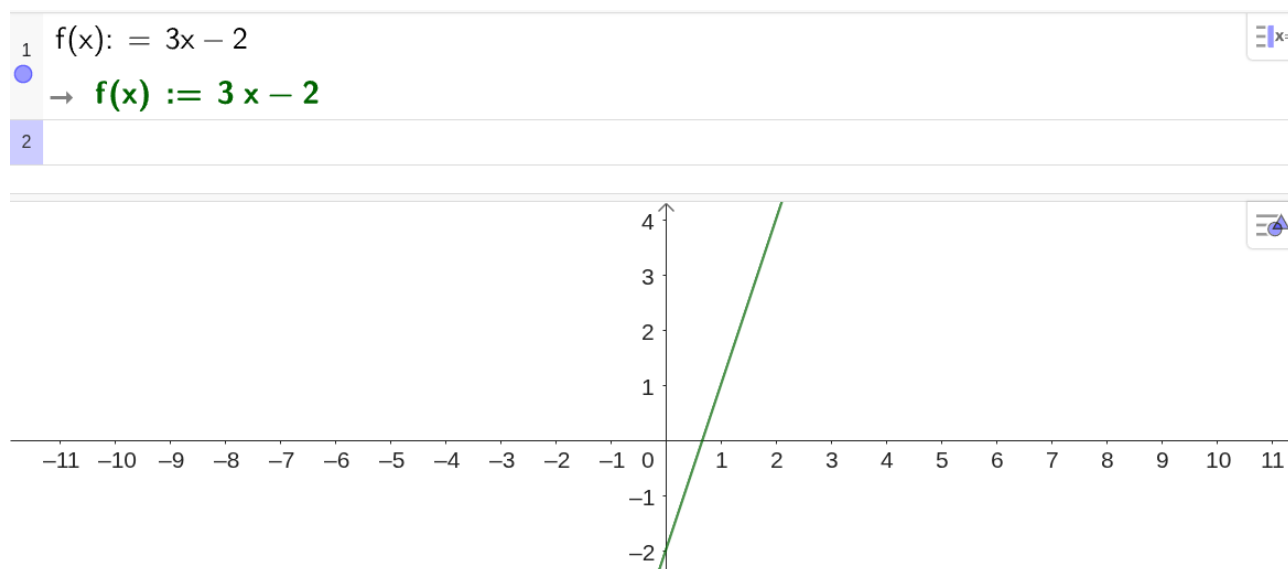
Muuttujien käyttö on tällöin jälleen vapaampaa.

$$\begin{array}{l}
 \text{Ratkaise}(\{3s - 4t + 2r = 0, 2s + 3t - r = -2, -s + 4t + 5r = 5\}, \{s, r, t\}) \\
 10 \quad \rightarrow \left\{ \left\{ s = \frac{-66}{115}, r = \frac{101}{115}, t = \frac{1}{115} \right\} \right\}
 \end{array}$$

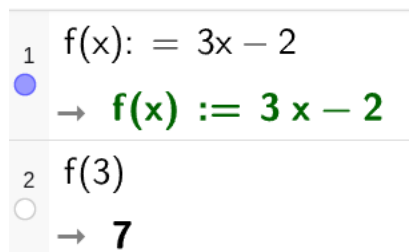
Esimerkiksi fysiikan tehtävissä saattaa olla tarpeen ratkaista yhtälöryhmiä, joissa muuttujien nimet ovat suuretunnuksia.

Funktiot ja kuvaajien piirtäminen

CAS-laskimessa funktio määritetään laittamalla yhtäsuuruusmerkin eteen $::$. Funktion kuvaaja ilmestyy tällöin automaattisesti piirtoalueelle.

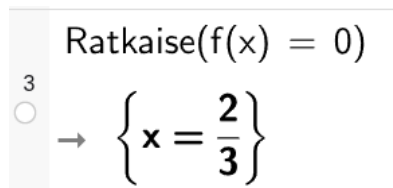


Funktion arvoja voi nyt laskea suoraan syöttämällä halutun luvun argumentin paikalle.



1 $f(x) := 3x - 2$
→ $f(x) := 3x - 2$
2 $f(3)$
→ 7

Kohdan jossa funktion nimeä voi myös käyttää lausekkeen tilalla komennoissa. Voit esimerkiksi ratkaista funktion nollakohdan yhtälönä helposti.



Ratkaise($f(x) = 0$)
3
→ $\left\{ x = \frac{2}{3} \right\}$

Geogebrian CAS-komentoja suomeksi

Täydellisempi lista komennoista englanniksi löytyy osoitteesta:

https://wiki.geogebra.org/en/CAS_Specific_Commands

Sievennä(<Funktio>)

JaaTekijöihin(<Polynomi>) - myös luku käy syötteeksi

PoistaSulkeet(<Lauseke>) - avaa lausekkeesta kaikki sulkeet

Murtoluvuksi(<Desimaaliluku>)

Summa(<Lauseke>, <Muuttuja>, <Alkuarvo>, <Loppuarvo>)

Lukuarvona(<Lauseke>, <merkitsevät numerot>) - laskee numeerisen arvon

Ratkaise(<Yhtälö>, <Muuttuja>) - oletusmuuttujana x

Ratkaise(<Yhtälölista>, <Muuttujalista>) - listat {} sisään

Derivaatta(<Lauseke>, <Muuttuja>) - oletusmuuttujana x

Integraali(<Funktio>, <muuttuja>) - oletusmuuttujana x

Integraali(<Funktio>, <x:n alkuarvo>, <x:n loppuarvo>) - määrätty integraali

RajaArvo(<Lauseke>, <Muuttuja>, <Arvo>) - oletusmuuttujana x

RajaArvoOikea(<Lauseke>, <Muuttuja>, <Arvo>)

RajaArvoVasen(<Lauseke>, <Muuttuja>, <Arvo>)

SovitaSuora(<Pistelista>) - pistelistan voi määrittää taulukkoikkunassa

SovitaEksp(<Pistelista>) - pistelistan voi määrittää taulukkoikkunassa

SYT(<Luku>, <Luku>) - Suurin yhteinen tekijä
PYM(<Luku>, >Luku>) - Pienin yhteinen monikerta

Vektorit ja analyyttinen geometria

Pistetulo(<Vektori>, <Vektori>)

Pituus(<Vektori>) - vektori muodossa (x,y,z)

Kulma(<Vektori>, <Vektori>) -vektorit voi korvata myös suorilla

Yksikkövektori(<Vektori>)

Etäisyys(<Piste>, <Objekti>) - pisteen ja objektin voi korvata lähes millä vain

Suora(<Piste>, <Piste>) - toisen pisteen voi korvata suuntavektorilla

Taso(<Piste>, <Suora>) - Suoran voi korvata kahdella muulla pisteellä

Ympyrä(<Piste>, <Säteen pituus>)

Paraabeli(<Piste>, <Suora>) - suoraksi paraabelin johtosuora