Mekaniikkan jatkokurssi

Tapio Hansson

26. tammikuuta 2022

Mekaniikan jatkokurssi

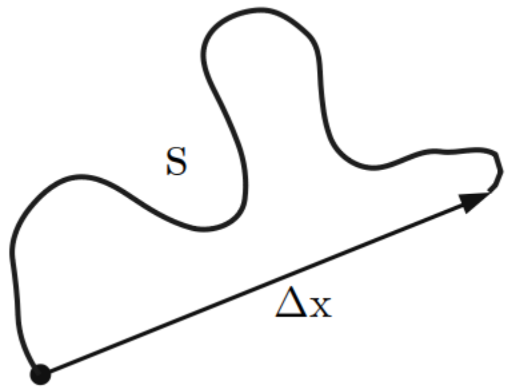
Tämä materiaali on suunnattu lukion koulukohtaisen syventävän mekaniikan kurssin materiaaliksi. Kurssilla kerrataan lukion mekaniikan keskeisiä asioita ja syvennetään etenkin heittoliikkeen ja pyörimisliikkeen asioita.

1 Suoraviivainen liike

Suoraviivaisessa liikkeessä kappaleen paikka muuttuu suunnan pysyessä kaiken aikaa samana. Suoraviivainen liike voidaan aina yksinkertaistaa yksiulotteiseksi.

1.1 Matka vai paikka?

Fysiikassa on tapana erotella matka ja paikka toisistaan. Kappaleen kulkema matka ei voi koskaan olla negatiivinen, sillä suunnan käsite ei liity siihen. Matka on siis skalaarisuure. Paikka sen sijaan on sidottu johonkin koordinaatistoon, minkä vuoksi se voi saada myös negatiivisia arvoja, ja on myös vektorisuure.



Kuva 1: Paikan muutos on lähtö ja loppupisteen välinen etäisyys. Matka sen sijaan riippuu reitistä.

Matka sisältää siis kaiken kappaleen kulkeman matkan, eli tiedon reitistä, kun taas paikan muutos sisältää tiedon ainoastaan siitä, mistä on lähdetty, ja mihin on päädytty. Esimerkiksi suljettua rataa kiertävä formula-auto kulkee matkan, mutta sen paikan muutos kilpailun alun ja lopun välillä on käytännössä nolla. Yksiulotteisessa liikkeessä paikkaa merkitään yleensä koordinaatilla x ja paikan muutosta Δx. Matkaa merkitään yllensä kirjaimella s.

1.2 Vauhti vai nopeus?

Vastaavasti kuten matka ja paikan muutos, liittyvät toisiinsa myös vauhti ja nopeus. Nopeus on vektorisuure, joka sisältää tiedon suunnasta. Samoin kuin paikan suhteen, on rataa kiertävän formula-auton keskinopeus nolla, sillä sen suunta on välillä negatiivinen ja välillä positiivinen. Formula auton keskivauhti, eli nopeuden itseisarvo sen sijaan ei suinkaan ole nolla, vaan kilpailun aikana todennäköisesti helposti yli 200 km/h.

Sekä nopeutta, että vauhtia merkitään yleensä kirjaimella v, mutta suunta huomioitaessa on tapana käyttää vektorimerkintää $\bar{v}$.

Nopeus kuvaa siis paikan muutosta ajassa. Se vastaa kysymykseen kuinka monta metriä kuljetaan sekunnin aikana tai kuinka monta kilometriä tunnin aikana. SI-järjestelmässä yksikkönä on nimenomaan m/s. Muita käytössä olevia yksiköitä ovat mm. solmu, mach (äänen nopeuksia), tai vaikkapa mph (mailia tunnissa).

Kappaleen keskivauhti saadaan kun jaetaan sen kulkema matka matkaan käytetyllä ajalla

$$v = \frac{s}{t}. \tag{1}$$

Vastaavasti kappalee keskinopeus saadaan paikan muutoksen avulla

$$\bar{v} = \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}. \tag{2}$$

1.3 Kiihtyvyys

Kiihtyvyys kuvaa nopeuden muutosta samaan tapaan kuin nopeus kuvaa paikan muutosta. Arkielämässä tyypillisesti tavatut kiihtyvyydet ovat varsin lyhytkestoisia, joten yleensä yksikkönä käytetään ainoastaan m/s^2. Kiihtyvyyden saa siis laskettua nopeuden muutoksesta

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \tag{3}$$

Kiihtyvyyttä harvemmin tarkastellaan skalaarisuureena, kuten matkaa ja vauhtia.

1.4 Liikkeen mallit

Useita liikkeitä voidaan kuvata kahdella varsin yksinkertaisella mallilla. Tasaisessa liikkeessä kappaleen nopeus pysyy vakiona ja tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen kiihtyvyys pysyy vakiona.

1.4.1 Tasainen liike

Tasaisessa liikkeessä kappaleen kiihtyvyys on nolla ja nopeus pysyy siten vakiona. Kappale etenee jokaisena yhtä pitkänä aikavälinä yhtä pitkän matkan. Kappaleen kulkema matka ajan funktiona on tällöin

$$s(t) = s_0 + vt.$$

Matemaattisesti kyse on tietysti suoran yhtälöstä, jonka fysikaalinen kulmakerroin on nopeus v.

1.4.2 Tasaisesti kiihtyvä liike

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen kiihtyvyys pysyy vakiona. Tällöin kappaleen kulkemaa matkaa kuvaa funktio

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

missä s_0 ja v_0 ovat kappaleen matka ja nopeus ajan hetkellä $t = 0$. Koska kiihtyvyys poikkeaa nollasta, myös nopeus muuttuu ajan kuluessa. Nopeutta kuvaa nyt funktio

$$v(t) = v_0 + at.$$

Tasaisen kiihtyvyyden tapauksessa ongelmat ratkeavat yleensä joko toisella, tai molemmilla yllä mainituilla yhtälöillä. Varmin ratkaisu on muodostaa tilanteesta yhtälöpari, ja selvittää sen avulla tarpeelliset suureet.

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$$

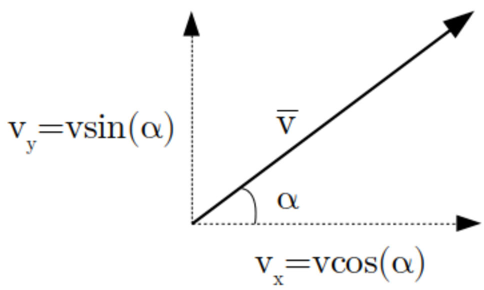
2 Useampiulotteinen liike

Liike on harvoin täysin yksiulotteista. Kappaleen nopeusvektori osoittaa aina vain yhteen suuntaan kerrallaan, mutta jos suunta muuttuu, joudumme pohtimaan miten ja mihin päin kappale on menossa. Ongelma tulee vastaan jo hyvin arkipäiväisissä kohteissa, kuten kappaleiden heittämisessä.

2.1 Vektorin komponentit

Vektorisuureet voidaan jakaa komponentteihin. Useimmiten fysiikassa käytetään x- ja y-komponentteja, mutta toisinaan tietysti, esimerkiksi kaltevalla tasolla, jonkin muun suuntaiset komponentit saattavat tulla tarpeeseen. Kaikki vektorilaskennan keinot ovat luonnollisesti käytössä myös fysikaalisissa vektoriessa, joten vektorin voi jakaa komponentteihin joko niiden avulla, tai sitten käyttäen systeemin geometriaa hyväksi.

Vektorien pituudet ovat fysiikassa usein kiinnostavia suureita, joten komponentteihin jakokin tehdään usein skalaarimuodossa ilman kantavektoreita. Tällöin vektorin x ja y-komponenttien pituudet saa systeemin geometriasta, kuten kuvassa 2.



Kuva 2: Komponenttivektorien pituudet saa usein trigonometristen funktioiden avulla.

2.2 Heittoliike

Heittoliike on eräs kaksiulotteisen liikkeen tapaus. Vapaassa heittoliikkeessä olevaan kappaleeseen vaikuttaa yleensä vain painovoima, joka osoittaa aina suoraan alaspäin. Näin ollen jos kappaleella on vaakasuoraa alkunopeutta, sen nopeuden suunta muuttuu painovoiman vaikutuksesta. Koska painovoiman aiheuttama putoamiskiihtyvyys on vakio, päätyy kappale paraabelin muotoiselle radalle, mikäli ilmanvastus voidaan jättää huomiotta.

Heittoliikkeen tarkastelu yksinkertaistuu, kun liikeen jakaa erikseen x- ja y-suuntaiseen liikkeeseen. Tällöin x-suuntaista liikettä voidaan tarkastella tasaisena liikkeenä ja y-suuntaista taisaisesti kiihtyvänä liikkeenä. Ongelman ratkaisua varten saadaan yhteensä neljä yhtälöä, kun nopeuden yhtälöt saadaan mukaan. Vaakasuunnassa

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ v_x = v_{0x} \end{cases}$$

ja pystysuunnassa

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Heittoliiketehtävissä on muutamia huomionarvoisia kohtia.

- Ratakäyrän huippukohdassa kappaleen pystysuuntainen nopeus on nolla.
- Palattuaan lähtötasolle, kappaleen nopeuden suuruus on sama kuin lähtönopeus.
- Jos kappaleen lähtöpaikan nollatason voi valita joko lähtökorkeudeksi, tai esimerkiksi maanpintaan.
- Yhtälöt eivät ymmärrä missä kohtaa maanpinta sijaitsee, joten ne voivat antaa vastaukseksi negatiivisia aikoja ja paikkoja. Laskijan omalla vastuulla on tunnistaa oikeat vastausvaihtoehdot.

3 Nopeus, kiihtyvyys ja derivointi

Kappaleen paikka, nopeus ja kiihtyvyys liittyvät toisiinsa derivaatan kautta. Paikan funktion muutosta kuvaa nopeuden funktio, eli kappaleen nopeus saadaan derivoimalla paikan funktiota. Vastaavasti kiihtyvyys kuvaa nopeuden muutosta, joten se saadaan derivoimalla nopeuden lauseketta ajan suhteen ja näin ollen derivoimalla paikan lauseketta kahdesti:

$$v(t) = x'(t) \tag{4}$$

$$a(t) = v'(t) = x''(t) \tag{5}$$

Näin voidaan tarkastella paikkaa ja nopeutta myös tilanteissa, joissa kiihtyvyys on muuttuvaa.

Derivaatan avulla päästään käsiksi myös hetkellisiin suureisiin. Mikäli tunnetaan paikan lauseke, saadaan kappaleen nopeus tietyllä hetkellä laskemalla paikkafunktion derivaatan arvo kyseisellä hetkellä. Fysiikassa olemme usein tottuneet graafiseen derivointiin, eli piirrämme paikkafunktiolle tangentin haluttuun kohtaan ja määritämme tangentin kulmakertoimen, mutta mikäli paikan lauseke tunnetaan analyyttisesti, voidaan derivaatan arvo laskea tietysti myös tarkasti.

Mikäli liike on useampiulotteista, voidaan se jakaa komponentteihin kuten heittoliikkeen kohdalla tehtiinkin. Vektoriarvoisten funktioiden derivointi ja integrointin tapahtuu suoraviivaisesti komponenteittain. Mikäli kappaleen paikkaa kuvaa ajasta riippuva vektori $\bar{r}(t) = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k}$, on kappaleen nopeusvektori $\bar{v}(t) = r'_x\hat{\imath} + r'_y\hat{\jmath} + r'_z\hat{k}$.

Vastaavasti toiseen suuntaan kulkiessa olemme tottuneet integroimaan graafisesti esimerkiksi kiihtyvyyden kuvaajaa, saadaksemme nopeuden lausekkeen, eli laskemme kiihtyvyyden kuvaajan alle jäävän pinta-alan. Sama voidaan tehdä analyyttisesti kiihtyvyyden lausekkeelle. Kappaleen aikavälillä $[t_0, t_1]$ saavuttama nopeus saadaan kiihtyvyydestä määrättynä integraalina

$$v(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt \tag{6}$$

Analyyttisellä integroinnilla voidaan kiihtyvyydestä selvittää nopeuden lauseke ajan funktiona. Koska funktiolla on äärettömän monta integraalifunktiota, tulee lisäksi valita oikea. Integroimisvakio voidaan määrittää jostain fysikaalisesta raeunaehdosta, esimerkiksi tiedosta, mikä on kappaleen nopeus ajan hetkellä $t = 0$.

$$v(t) = \int a(t)dt$$

Vastaavasti paikka kappaleen kulkema siirtymä aikavälillä $[t_0, t_1]$ saadaan

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

ja paikan funktio saadaan reunaehdon kanssa määritettyä integraalilla

$$x(t) = \int v(t)dt.$$

4 Newtonin lait

Newtonin lait, eli mekaniikan peruslait, muodostavat klassisen fysiikan vankan perustan. Lait muodostivat vankan perustan koko fysiikalle aina 1900-luvun vaihteeseen asti, ja edelleen tänä päivän ne selittävät makroskooppisen maailman ja arkikokemuksen täydellisesti. Newtonin lait ovat fysiikan ymmärtämisen kannalta ensiarvoisen tärkeitä.

Newton julkaisi lait vuonna 1687 prinsiipiassaan, eli kirjassaan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Luonnonfilosofian matemaattiset perusteet. Newton esittelee kirjassa kolme lakiaan sekä johtaa Keplerin lait niiden perusteella. Newtonin tunnetuimpiin lainauksiin kuuluukin

> Jos olen nähnyt muita kauemmaksi, se johtuu vain siitä että seisoin jättiläisten harteilla.

Keplerin lait, jotka Johannes Kepler löysi kokeellisesti, olivat tärkeässä osassa Newtonin työtä, samoin kuin Galileo Galilein saavutukset liikkeen tutkimuksen parissa.

4.1 Newtonin I eli jatkavuuden laki

> Kappale jatkaa tasaista suoraviivaista liikettä vakionopeudella tai pysyy levossa, jos siihen ei vaikuta ulkoisia voimia.

Jatkavuuden laki kertoo, että kappaleen liiketilan muuttamiseen tarvitaan aina voima. Ulkoisten voimien puuttuessa kappale jatkaa matkaansa kuten siihen asti. Jos tarkkoja ollaan, ei Newtonin I lain mukaista tilannetta ole olemassa, sillä kaikkiin kappaleisiin vaikuttaa aina jokin voima gravitaation kantaman ollessa ääretön. Laki kuvaa kuitenkin kappaleiden dynamiikkaa, eli liikeoppia hyvin perustavaa laatua olevalla tasolla. Usein lakia sovelletaan myös tilanteissa, joissa kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien summa on nolla, jolloin kappale jaktaa myös taisaista suoraviivaista liikettään, mutta tämä on periaatteessa ennemminkin seurausta Newtonin II laista.

4.2 Newtonin II eli dynamiikan peruslaki

> Kappaleeseen, jonka massa on m vaikuttava voima $\bar{F}$ saa siinä aikaan kiihtyvyyden $\bar{a}$ siten, että
> $$\bar{F} = m\bar{a}.$$

Dynamiikan peruslaki kuvaa sitä, miten kappaleet kokevat voiman vaikutuksen. Suureen kappaleeseen kohdistuva voima saa aikaan pienemmän vaikutuksen, kuin pienempään kappaleeseen kohdistuva. Kiihtyvyys on suoraan verrannollinen voiman suuruuteen, ja kappaleen massa toimii verrannollisuuskertoimena. Koska voimat ja kiihtyvyydet ovat vektorisuureita, saadaan kappaleen kiihtyvyys siihen vaikuttavien voimien vektorisummana.

Laki voidaan kirjoittaa myös liikemäärän avulla

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt},$$

sillä $\bar{p} = m\bar{v}$, jolloin $\frac{d\bar{p}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}$.

4.3 Newtonin III eli voiman ja vastavoiman laki

> Jos kappale A vaikuttaa kappaleeseen B jollain voimalla, vaikuttaa kappale B kappaleeseen A täsmälleen yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella voimalla.

Voiman ja vastavoiman laki kuvaa vuorovaikutusta. Vuorovaikutustapahtumassa, esimerkiksi Kuun kiertäessä Maata radallaan tai kirjan levätessä pöydän päällä, syntyy aina kaksi voimaa. Vuorovaikutukseen tarvitaan siis aina kaksi kappaletta, ja ne kohdistavat toisiinsa voimat, joita sanotaan voimaksi ja vastavoimaksi. Esimerkiksi Maan vetäessä Kuuta painovoimallaan puoleensa, vetää Kuu Maata yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella voimalla. Syy miksi, Kuu kiertää Maata, eikä toisin päin löytyy tietysti dynamiikan peruslaista, sillä Kuu kokee pienemmän massansa ansiosta huomattavasti suuremman kiihtyvyyden kuin Maa.

Voima ja vastavoima kohdistuvat siis aina eri kappaleisiin. On tärkeää erottaa, se tilanteesta, jossa paikallaan olevaan kappaleeseen kohdistuu kaksi yhtä suurta mutta vastakkaissuuntaista voimaa. Esimerkiksi pöydällä olevaan kirjaan kohdistuu Maan vetovoima ja pöydän tukivoima, jotka ovat vastakkaissuuntaisia ja yhtä suuria, mutta eivät voima ja vastavoima. Maan vetovoiman vastavoima on voima, jolla kirja vetää Maata puoleensa, ja nämä voimat syntyvät gravitaatiovuorovaikutuksessa. Vastaavasti pöydän tukivoiman vastavoima on voima, jolla kirja painaa pöydän pintaa. Nämä voimat vuorostaan syntyvät kosketusvuorovaikutuksesta.

5 Liikemäärän ja energian säilymislait

Liikemäärän ja energian säilymislait ovat fysiikassa keskeisimpiä lakeja. Universumin kokonaisenergia ja liikemäärä näyttävät säilyvän, eikä näihin ole havaittu poikkeuksia. Viimeisin vakavissaan esitetty poikkeus säilymislakeihin tuli Niels Bohrilta β-hajoamisen yhteydessä. Kun kyseinen säteily löydettiin, näytti ensin siltä, että säteilyn energiajakauma ei käy järkeen energian säilymislain kanssa. Energiaa näytti karkaavan johonkin. Tämä johtui neutriinosta, joka on β-hajoamisessa syntyvä toinen hiukkanen, jonka havaitseminen on hyvin hankalaa. Kun neutriino löydettiin, palautui tasapaino jälleen, eikä energian ja liikemäärän säilymislakeja ole sittemmin kyseenalaistettu.

5.1 Liikemäärä

Liikemääräksi kutsutaan kappaleen nopeuden ja massan tuloa.

$$\bar{p} = m\bar{v} \tag{7}$$

Suure kuvaa siis kirjaimellisesti liikkeen määrää. Liikemäärä on vektorisuure, ja sen suuta on tietysti nopeuden suuntaan, sillä massa on skalaarisuure. Liikemäärän säilymislaki tarkoittaa sitä, että liikemäärän kokonaismäärä säilyy. Se voi siirtyä kappaleelta toiselle, muttei koskaan katoa.

Liikemäärän säilyminen ei välttämättä näy arkielämässä, sillä törmäykset ovat harvoin kimmoisia ja kappaleilla on tapana pysähtyä. Tällöin liikemäärä siirtyy tyypillisesti kappaleiden lämpövärähtelyksi. Esimerkiksi biljardipöydän pallot törmäilevät toisinsa, mutta lopulta ne pysähtyvät. Niissä aluksi ollut liikemäärä on siirtynyt vastusvoimien tekemän työn kautta pöydän ja pallojen sisäiseksi värähtelyksi.

Useimmin liikemäärän säilymistä tarvitaan erilaisissa törmäystilanteissa. Liikemäärä säilyy kaikissa törmäyksissä, joten säilymislaki antaa tavan analysoida törmäävien kappaleiden nopeuksia ennen ja jälkeen törmäyksen.

5.2 Liike-energia

Liikkeeseen varastoituu energiaa. Liikkuvan kappaleen sisältämä energia riippuu liikemäärän lailla myös massasta ja nopeudesta, mutta nopeus lisää energiaa nopeammin. Tarkemmin sanoen liikkuvan kappaleen kineettinen energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \tag{8}$$

Törmäystilanteissa liike-energia ei välttämättä säily, sillä usein törmäyksissä tapahtuu erilaisia kappaleiden muodon muutoksia ja vastusvoimien tekemää työtä. Liike-energia säilyy *kimmoisissa* törmäyksissä, joissa kappaleet eivät tartu toisiinsa, ja niiden muoto ei muutu. *Kimmottomissa* törmäyksissä osa kappaleiden liike-energiasta katoaa ja täysin kimmottomissa tapauksissa kappaleet tarttuvat toisiinsa.

Energian säilymislakia voi käyttää kuitenkin useissa tilanteissa, ja toisinaan sen avulla voidaan tarkastella vastusvoimien tekemää työtä. Mekaanisen energian säilymislaki kuuluukin

$$E_1^k + E_1^p = E_2^k + E_2^p + W_k, \tag{9}$$

missä alaindeksillä 1 viitataan vuorovaikutusta edeltävään tilanteeseen ja 2 vuorovaikutuksen jälkeiseen tilanteeseen. Kappalen mekaaninen energia koostuu siis liike-energiasta ja potentiaalienergiasta, joten näiden summan tulee säilyä. Potentiaalienergia on useimmiten gravitaatiokentän potentiaalienergiaa

$$E_p = mgh, \tag{10}$$

mutta voi olla myös esimerkiksi sähkökentän potentiaalienergiaa, tai vaikkapa jousen potentiaalienergiaa

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2. \tag{11}$$

Kitkan, tai muiden vastusvoimien, tekemä työ W_k siirtää energiaa pois systeemistä, joten sen vuoksi energia systeemin sisällä ei säily. Ideaalisessa tilanteessa, tai kun vastusvoimia voidaan pitää häviävän pieninä, energialajit vain muuttavat muotoaan.

5.3 Törmäykset

Kimmoisan törmäyksen tapauksessa sekä liike-energia, että liikemäärä säilyvät. Kimmottomissa törmäyksissä säilyy ainaoastaan liikemäärä. Liikemäärä tarjoaa vektorisuureena mahdollisuuden tarkastella tilannetta erikseen x- ja y-suunnassa. Liikemäärä säilyykin siis komponenteittain, eli yhdestä säilymislaista voidaan kaksiulotteisessa tilanteessa saada kuitenkin kaksi yhtälöä

$$\begin{cases} p_{xa} = p_{xl} \\ p_{ya} = p_{yl} \end{cases} \tag{12}$$

Jos törmäys on kimmoisa, saadaan tilanteeseen liike-energian säilymisestä vielä kolmas yhtälö.

6 Impulssi

Usein fysiikassa tarkastellaan ideaalisia tilanteita ja tilanteita joissa katsotaan vain ennen ja jälkeen vuorovaikutuksen olevia tilanteita. Voimaa ei kuitenkaan voi useinkaan pitää vakiona, mikä aiheuttaa tarkempaa analyysiä tehdessä haasteen. Voima aiheuttaa kiihtyvyyden, mutta jos voima ei ole vakio, ei kiihtyvyyskään ole. Usein ongelma kierretään käyttämällä keskimääräistä voimaa, mutta hetkellisen voiman kautta saadaan tarkka kuvaus, kun otetaan käyttöön suure nimeltä *impulssi*.

Impulssi on voiman aikavaikutus, tarkemmin sanottuna voiman integraali vaikutusajan yli. Vakiovoiman tapauksessa impulssi yksinkertaistuu muotoon

$$\bar{I} = \bar{F}\Delta t, \tag{13}$$

mutta yleisemmin lasketaan siis

$$\bar{I} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt \tag{14}$$

missä t_1 on voiman vaikutusajan alku- ja t_2 loppuhetki.

Toisaalta koska Newtonin toisen lain mukaan $\bar{F} = m\bar{a}$, ja $a = \frac{d\bar{v}}{dt}$,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\bar{v}}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\bar{p}}{dt}dt = \int_{p_1}^{p_2} d\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \Delta\bar{p}. \tag{15}$$

Eli toinen tapa ajatella impulssia on miettiä sitä liikemäärän muutoksena. Tämä antaa mahdollisuuden tarkastella voiman vaikutusta, vaikka voimaa ajan funktiona ei voitaisikaan mitata erikseen.

Impulssia käytännössä demonstroi esimerkiksi tämä dynaaminen herrasmies: https://www.youtube.com/watch?v=fdeH6Ksedwk. Teoreettisempi kuvaus suomeksi löytyy tästä: https://www.youtube.com/watch?v=XYsDMsGSyXA.

7 Pyöriminen

Kappaleen pyörimisen sanotaan olevan analogista kappaleen etenemisliikkeen kanssa. Se tarkoittaa, että jokaiselle pyörimisliikkeen suureelle ja laille löytyy vastineensa etenemisliikkeestä, joten fysiikka on periaatteessa aivan samaa, suureet vain vaihtuvat. Oheisessa taulukossa on listattu oleellisimmat etenemisliikkeen suureita vastaavat pyörimissuureet.

eteneminen	pyöriminen
matka s	kiertokulma φ
nopeus v	kulmanopeus ω
kiihtyvyys a	kulmakiihtyvyys α
voima F	momentti M
massa m	hitausmomentti J
liikemäärä p	pyörimismäärä L
impulssi I	impulssimomentti

Taulukko 1: Etenemisliikkeen suureita vastaavat pyörimisliikkeen suureet.

Suureiden avulla myös liikkeen lait ovat muunnettavissa suurimmaksi osaksi aivan suoraan pyörimisliikkeeseen. Esimerkiksi tasaisen liikkeen ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöt kääntyvät suoraan pyörimisversioiksi, eli

$$\begin{aligned} s = vt \quad &\Rightarrow \quad \varphi = \omega t \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad &\Rightarrow \quad \phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Myös Newtonin II laki muuntuu pyörimismuotoon, kun voima korvataan momentilla, massa hitausmomentilla ja kiihtyvyys kulmakiihtyvyydellä.

$$\bar{F} = m\bar{a} \quad \Rightarrow \quad \bar{M} = J\bar{\alpha} \tag{17}$$

Hitausmomentti on suure, joka kuvaa kappaleen kykyä vastustaa pyörimisen muutoksia. Mitä suurempi hitausmomentti on, sitä suurempi momentti tarvitaan kappaleen kääntämiseen. Sen yksikkö on

$$[J] = \frac{[M]}{[\alpha]} = \frac{1\,\mathrm{Nm}}{1\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 1\,\mathrm{kgm}^2. \tag{18}$$

Hitausmomentti riippuu kappaleen massan lisäksi myös siitä, kuinka kauas massa asettuu pyörimisakselista. Esimerkiksi umpinaisen sylinterin hitausmomentti on pienempi kuin rengasmaisen sylinterin, mikäli niillä on sama massa. Renkaassa massa on keskimäärin kauempana keskiakselista kuin umpinaisessa sylinterissä. Erilaisten kappaleiden hitausmomentteja on listattu esimerkiksi MAOL-taulukoissa.

Pyörimisliikkeeseen varastoituu myös energiaa. Energia riippuu hitausmomentista sekä pyörimisnopeudesta, ja on analoginen etenemisliikkeen energiaan:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{19}$$

Vierivän kappaleen kokonaisliikenergia koostuukin siis sekä etenemisliikkeen, että pyörimisliikkeen energiasta.

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{tr} + E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{20}$$

Alaindeksi tr viittaa translaatioon, eli etenemisliikkeeseen ja r rotaatioon, eli pyörimisliikkeeseen.

Myös liikemäärän säilymislaki on voimassa pyörimisliikkeessä. Tällöin puhutaan yleensä *pyörimismäärän säilymislaista*. Pyörimismäärä on pyörimisliikkeessä liikemäärää vastaava suure. Sitä merkitään tunnuksella L ja se määritellään

$$L = J\omega. \tag{21}$$

Pyörimismäärää kutsutaan toisinaan myös kulmaliikemääräksi tai liikemäärämomentiksi. Pyörimismäärän säilymislain mukaan siis suljetussa systeemissä pyörimismäärä säilyy, eli

$$\begin{aligned} L_{\text{alku}} &= L_{\text{loppu}} \\ J_{\text{alku}}\omega_{\text{alku}} &= J_{\text{loppu}}\omega_{\text{loppu}} \end{aligned} \tag{22}$$

Jos kappaleen muoto muuttuu, muuttuu siis myös pyörimismäärä. Tämä havaitaan esimerkiksi taitoluistelijan vetäessä itsensä suoraksi piruetin loppuvaiheessa. Tällöin luistelijan hitausmomentti pienenee ja pyörimisnopeus kasvaa.

7.1 Kiihtyvyys ympyräliikkeessä

Pyörivän kappaleen reunalla ja ympyräliikkeessä olevaan kappaleeseen kohdistuu niinsanottu keskeisvoima tai keskipakovoima. Keskipakovoiman suhteen on tärkeää ymmärtää, että keskipakovoima *ei* ole voima, joka johtuu ympyräliikkeestä, vaan voima, joka aiheuttaa sen! Esimerkiksi Kuun kiertäessä Maata keskipakovoimana toimii Maan Kuuhun kohdistama painovoima. Ilman painovoimaa Kuu karkaisi radaltaan. Tämä johtuu siitä, että nopeuden muuttaminen vaatii kiihtyvyyden ja kiihtyvyys taas vaatii voiman. Koska nopeus on vektorisuure, se muuttuu myös silloin, kun vain sen suunta muuttuu.

Ympyräradalla kappaleen kiihtyvyys on tapana jakaa liikkeen tangentin suuntaiseen, ja sitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin. Tangenttia vastaan kohtisuora komponentti on nimeltään normaalikiihtyvyys, ja sen suuruus riippuu kappaleen ratanopeudesta, sekä radan säteestä

$$a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{23}$$

Jotta kappale voi kulkea ratanopeudella v ympyräradalla, jonka säde on r, tulee siihen Newtonin II lain mukaan siis kohdistua voima

$$F = m\frac{v^2}{r}. \tag{24}$$

Normaalikiihtyvyys ei muuta kappaleen ratanopeutta lainkaan, sillä sen suunta ei ole radan suunta. Mikäli kappaleen ratanopeus muuttuu, sen saa aikaan tangenttikiihtyvyys.

7.2 Ympyrä- ja pyörimisliikkeen yhteys

Pyörivän kappaleen ulkokehällä olevat osat ovat ympyräliikkeessä. Toisaalta esimerkiksi Kuun kierrolle voidaan määrittää kulmanopeus, joka kertoo kuinka suuren kulman Kuu kiertää aikayksikössä. Kulmanopeus ja ratanopeus liittyvät toisiinsa radan säteen avulla. Mitä suurempi kulmanopeus, sitä nopeammin kappaleen täytyy radallaan edetä, mutta mikäli radan säde on hyvin pieni, riittää pienempi eteneminenkin. Tarkemmin ottaen

$$v = \omega r, \tag{25}$$

eli kappaleen ratanopeus saadaan kertomalla kulmanopeus radan säteellä.

Kiihtyvyydelle pätee samoin, eli mitä suurempi kulmakiihtyvyys, sitä enemmän kappaleen ratanopeuskin muuttuu. Tangenttikiihtyvyys on siis

$$a_t = \alpha r. \tag{26}$$